# SUR L'ASYMPTOTIQUE DES SOMMES DE KEMPNER POUR DE GRANDES BASES

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

RÉSUMÉ. Soit K la somme des inverses des entiers n'ayant pas le chiffre $b-1$ en base $b$. Nous montrons $\mathrm{K} = b\log(b) - \mathrm{A}/b - \mathrm{B}/b^2 - \mathrm{C}/b^3 + \mathrm{O}(1/b^4)$ avec $\mathrm{A} = \zeta(2)/2$, $\mathrm{B} = (3\zeta(2)+\zeta(3))/3$ et $\mathrm{C} = (2\zeta(2)+4\zeta(3)+\zeta(4))/4$.

## 1. THÉORÈME PRINCIPAL

Kempner [10] a remarqué en 1914 que la sous-série de la série harmonique obtenue en supprimant tous les dénominateurs possédant au moins une fois le chiffre 9 en base 10 était convergente. La convergence est devenue depuis un exercice classique et populaire dans les cours de premier niveau d'initiation à l'Analyse. Mais le sujet des sommes de Kempner n'est élémentaire que pour ceux qui n'y ont jamais réfléchi.

Notons $\mathrm{K}(b,d)$ la somme harmonique avec la restriction de Kempner, pour la base $b \geqslant 2$ et l'entier $d \in \{0,\dots,b-1\}$. Irwin [9] a considéré plus généralement en 1916 des séries où l'on impose par exemple au chiffre 9 d'être présent exactement $k$ fois dans chaque dénominateur. Notons $\mathrm{I}(b,d,k)$ ces sommes utilisant la base $b$, le chiffre $d$ et le nombre d'occurrences $k$, de sorte que $\mathrm{K}(b,d) = \mathrm{I}(b,d,0)$.

Fine [12] a montré $\mathrm{K}(b,0) = b\log(b) + \mathrm{O}(b^{-1})$ et Kløve [11] a obtenu $\mathrm{K}(b,d) = b\log(b) + \mathrm{O}(b)$ pour tout $d$. Ces résultats ont été améliorés par l'auteur [5, 6], par exemple on sait maintenant que $\mathrm{K}(b,d) = b\log(b) - b\log(1+d^{-1}) + \mathrm{O}_d(b^{-1})$ pour tout $d > 0$ fixé. Et [6] donne cinq termes supplémentaires du développement en puissances inverses de $b$. En ce qui concerne la dépendance en $k$, Farhi a montré $\lim_{k\to\infty} \mathrm{I}(b,d,k) = b\log(b)$ pour tout $b$ et $d$ ([7]).

Dans cet article nous allons retrouver $b\log(b)$ en prenant $k=0$ avec $d = b-1$ comme chiffre exclu. Autrement dit nous étudions la généralisation directe de la série originelle de Kempner à d'autres bases $b$ que 10. Voici notre résultat :

**Théorème 1.** *Soit $b > 1$ un entier et $\mathrm{K}(b,b-1)$ la somme des $\frac{1}{m}$, prise sur tous les entiers strictement positifs ne contenant dans leur écriture en base $b$ aucune occurrence du chiffre $b-1$.*

*Alors, pour $b$ tendant vers l'infini :*

$$\mathrm{K}(b,b-1) = b\log(b) - \frac{\zeta(2)}{2b} - \frac{3\zeta(2)+\zeta(3)}{3b^2} - \frac{2\zeta(2)+4\zeta(3)+\zeta(4)}{4b^3} + \frac{\mathrm{O}(1)}{b^4} \tag{1}$$

---

*Date*: 3 mars 2024 (v1); 26 avril 2024 (v2): correction d'une coquille dans le résumé (!), remaniement de l'introduction avec ajout de plusieurs références.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11Y60, 11M06; Secondary 11A63, 11B37, 30C10, 41A60, 44A60;

*Key words and phrases.* Ellipsephic numbers, Kempner series, asymptotic expansions.

Ce n'est pas la première fois que les $\zeta(n)$ apparaissent dans la théorie (qui n'en est qu'à ses débuts) des séries de Kempner. En effet Fischer [8] a démontré en 1993 la formule suivante :

$$K(10,9) = 10\log(10) - \sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m-1}\beta_m\zeta(m+1) \tag{2}$$

Dans cette formule les coefficients rationnels $(\beta_m)$ vérifient les récurrences linéaires :

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k}(10^{m-k+1} - 10^k + 1)\beta_{m-k} = 10\,(11^m - 10^m) \tag{3}$$

pour $m \geqslant 1$ (en particulier $\beta_0 = 10$).

Comme nous l'expliquons dans un travail ultérieur [5] les coefficients $\beta_m$ sont des cas particuliers des quantités dénotées $v_m$, qui sont des fractions rationnelles en la variable $b$ et que l'auteur a définies en général dans [4] (pour toute base et tout ensemble de chiffres exclus), et il est possible d'obtenir le Théorème 1 à partir d'une formule généralisant (2). Mais ici nous obtenons le Théorème 1 en prenant comme point de départ les séries de [3] et [4] pour représenter $K(b,d)$. Ceci est l'occasion d'obtenir certains résultats sur les $v_m$ vues comme fonctions analytiques de la base $b$, et de les employer.

La représentation de "niveau $\ell = 1$" de $K(b,d)$ donnée par le Theorem 4 de [4] est, dans ce cas avec $d = b-1$, une somme finie de séries à convergences géométriques de ratios respectifs $2^{-1}, 3^{-1}, \dots, (b-1)^{-1}$ :

$$K(b, b-1) = \sum_{d=1}^{b-2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m}{(d+1)^{m+1}} \tag{4}$$

Dans le cas particulier avec $b = 2$, $d = 1$, on a $K(2,1) = 0$ puisqu'il n'y a pas d'entier non nul n'utilisant pas le chiffre 1 en écriture binaire, ce qui est compatible avec la formule ci-dessus, la somme sur $d$ étant alors vide. Par ailleurs les quantités $v_m$ sont aussi définies pour $b = 2$, elles sont dans ce cas toutes égales à 2.

Ces $v_m$ (qui ne dépendent ici que de $b$) vérifient les récurrences suivantes :

$$\forall m \geqslant 0 \quad (b^{m+1} - b + 1)\,v_m = b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j}\gamma_j v_{m-j} \tag{5}$$

où les symboles $\gamma_j$ sont définis par $\forall j \geqslant 0 \quad \gamma_j = \sum_{d=1}^{b-1} d^j$. On fera attention que $\gamma_j$ est utilisé ici pour désigner ce qui était noté $\gamma'_j$ dans [4, Thm. 4]. Les $v_m$ vérifient *aussi* une généralisation à toute base $b$ de la récurrence (3), voir [5]. Mais nous ne l'utiliserons pas. La quantité $d' = b - 1 - (b-1)$ de [4, Thm. 4] vaut ici 0. L'équation (5) est aussi valable pour $m = 0$ en considérant que la somme est vide donc nulle. Elle donne $v_0 = b$. On notera que $\gamma_0 = b - 1$ et qu'on a parfois avantage à écrire (5) avec $(b-1)\,v_m$ déplacé à droite.

## 2. Remarques préliminaires

Dans la suite nous allons traiter les $\gamma_j$ comme des polynômes de degré $j+1$ en la variable $b$. Rappelons la formule connue avec les nombres de Bernoulli, valable pour tout $j \geqslant 1$ entier (mais pas ici pour $j = 0$ puisque notre $\gamma_0$ vaut $b-1$) :

$$\gamma_j = \sum_{p=0}^{j}\binom{j}{p} B_p \frac{b^{j+1-p}}{j+1-p}$$

Nous passerons bientôt de la variable $b$ à la variable $c = b^{-1}$, et considérerons les $\gamma_j$ comme des fractions rationnelles en $c$. Dans ce cadre nous pourrons nous ramener à des polynômes en multipliant par $c^{j+1}$, c'est-à-dire en considérant $c^{j+1}\gamma_j$. On a en effet :

$$c^{j+1}\gamma_j = \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} \mathrm{B}_p \frac{c^p}{j+1-p} = \frac{1}{j+1} - \frac{c}{2} + \frac{jc^2}{12} - \frac{j(j-1)(j-2)c^4}{720} + \cdots + \mathrm{B}_j c^j \tag{6}$$

De plus lorsque $c = 1/b$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$, on a l'encadrement connu

$$\frac{1}{j+1} - \frac{c}{2} \leqslant c^{j+1}\gamma_j \leqslant \frac{1}{j+1} - \frac{c}{2} + \frac{jc^2}{12} \tag{7}$$

qui résulte de la comparaison avec l'intégrale de la fonction $t \mapsto t^j$ (comme l'on pratique au début du développement d'Euler-MacLaurin par exemple). On prendra garde qu'on ne peut pas étendre en général ces inégalités à la variable réelle $c \in [0, \frac{1}{2}]$ ni même l'encadrement "au cran d'avant" $0 \leqslant (j+1)c^{j+1}\gamma_j \leqslant 1$.

Nous aurons également besoin du résultat du calcul suivant, d'abord mené pour $c = 1/b$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$. Soit $m$ un entier naturel :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\gamma_j}{m+1-j} &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{j} \sum_{d=1}^{b-1} d^j \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{d=1}^{b-1} ((d+1)^{m+1} - d^{m+1}) = \frac{b^{m+1}-1}{m+1}\end{aligned}$$

Donc pour $c = 1/b$ :

$$c^{m+1} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\gamma_j}{m+1-j} = \frac{1-c^{m+1}}{m+1} \tag{8}$$

Comme l'équation (8) compare deux fonctions polynomiales en la variable $c$ et dit qu'elles coïncident en tous les $c = 1/b$, $b \geqslant 2$ entier, c'est donc une identité pour toutes les valeurs complexes de $c$.

## 3. Estimation de moments

Afin d'aider à suivre les démonstrations qui suivent, nous donnons ici les débuts des développements en puissances de $c = b^{-1}$ au voisinage de zéro, des $v_m$ pour $1 \leqslant m \leqslant 6$ :

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{b}{2} + 1 + \frac{c}{2} \frac{1-2c}{1-c+c^2} \\
&= \frac{b}{2} + 1 + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c^2 - c^3 + \mathrm{O}(c^4) \\
v_2 &= \frac{b}{3} + 1 + \frac{c}{6} \frac{6-5c-7c^2+10c^3-6c^4}{(1-c+c^2)(1-c^2+c^3)} \\
&= \frac{b}{3} + 1 + c + \frac{1}{6}c^2 - c^3 + \mathrm{O}(c^4) \\
v_3 &= \frac{b}{4} + 1 + c + \frac{1}{2}c^2 + 0c^3 + \mathrm{O}(c^4) \\
v_4 &= \frac{b}{5} + 1 + c + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^3 + \mathrm{O}(c^4)
\end{aligned}$$

$$v_5 = \frac{b}{6} + 1 + c + \frac{1}{2}c^2 + \frac{3}{4}c^3 + \mathrm{O}(c^4)$$
$$v_6 = \frac{b}{7} + 1 + c + \frac{1}{2}c^2 + c^3 + \mathrm{O}(c^4)$$

**Proposition 2.** *La fraction rationnelle $v_m$ en la variable complexe $c = b^{-1}$, définie pour $m \geqslant 0$ par les identités récurrentes (5), possède un pôle simple en $c = 0$ de résidu $(m+1)^{-1}$. Elle n'a pas d'autres pôles dans le disque ouvert de rayon $\rho$ avec $\rho \approx 0{,}755$ la racine réelle de l'équation $\rho^2(1+\rho) = 1$. Et :*

$$m \geqslant 4 \implies v_m = \frac{1}{(m+1)c} + 1 + c + \frac{1}{2}c^2 + \frac{m-2}{4}c^3 + \mathrm{O}_{c\to 0}(c^4) \tag{9}$$

*Démonstration.* On considère les fractions rationnelles $w_m = v_m - \frac{b}{m+1}$. Alors, par (5) et en utilisant initialement une somme pour $j$ allant de 0 à $m$ au lieu de 1 à $m$ (on rappelle que $\gamma_0 = b-1$) :

$$\frac{b^{m+2}}{m+1} + b^{m+1}w_m = b^{m+1} + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{b\gamma_j}{m+1-j} + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\gamma_j w_{m-j}$$
$$\frac{1}{(m+1)c} + w_m = 1 + \frac{1}{c}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}c^{m-j}\frac{c^{j+1}\gamma_j}{m+1-j} + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}c^{j+1}\gamma_j c^{m-j}w_{m-j}$$
$$\frac{1}{(m+1)c} + w_m = 1 + \frac{1-c^{m+1}}{(m+1)c} + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}c^{j+1}\gamma_j c^{m-j}w_{m-j}$$

On a utilisé (8). De plus on a $w_0 = b - b = 0$ et $c\gamma_0 = 1-c$. Donc au final, pour $m \geqslant 1$ (si $m=1$ la somme est vide donc nulle) :

$$(1 - c^m + c^{m+1})w_m = 1 - (m+1)^{-1}c^m + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m}{j}c^{j+1}\gamma_j c^{m-j}w_{m-j} \tag{10}$$

En particulier $w_1 = \frac{1-c/2}{1-c+c^2}$ a ses pôles sur le cercle unité. Le polynôme $1-c^2+c^3$ a une seule racine réelle $-\rho$ avec $\rho$ vérifiant $\rho^2(1+\rho) = 1$ et valant un peu plus de $3/4$. Les deux autres racines complexes conjuguées sont en dehors du disque unité. Lorsque $z$ est un complexe avec $|z| < \rho$ et $m \geqslant 2$ on a $|z^m - z^{m+1}| \leqslant |z|^2(1+|z|) < \rho^2(1+\rho) = 1$. Donc les pôles des $1 - c^m + c^{m+1}$ sont tous en dehors du disque ouvert centré en l'origine de rayon $\rho$. Les fractions rationnelles $w_m$ sont donc des fonctions analytiques dans ce disque ouvert, ce qui montre que $v_m$ comme fonction de $c$ a un pôle simple en zéro de résidu $1/(m+1)$.

On suppose dorénavant que $m$ est au moins 4. On sépare les contributions de $j = m-1$, $j = m-2$, $j = m-3$ à (10). On obtient

$$(1-c^m+c^{m+1})w_m = 1-(m+1)^{-1}c^m + c^{m+1}\left(m\gamma_{m-1}w_1 + \binom{m}{2}\gamma_{m-2}w_2 + \binom{m}{3}\gamma_{m-3}w_3\right) + \Gamma$$

avec $\Gamma$ la somme de $j=1$ à $m-4$ des $c^{j+1}\gamma_j c^{m-j}w_{m-j}$ et $m-j \geqslant 4$. Ce terme $\Gamma$ ne contribue pas aux 4 premiers coefficients de Taylor du terme de droite de l'équation ci-dessus, pas plus que $(m+1)^{-1}c^m$. Diviser par $1-c^m+c^{m+1}$ ne changera pas non plus ce début de développement de Taylor $\mathrm{A}(m) + \mathrm{B}(m)c + \mathrm{C}(m)c^2 + \mathrm{D}(m)c^3$. On a immédiatement $\mathrm{A}(m) = 1$ puisque $c^{m+1}\gamma_{m-i}$ pour $i = 1, 2, 3$ est un polynôme nul en zéro. D'après (6), les coefficients de $c \cdot c^m m\gamma_{m-1} \cdot w_1$ jusqu'à $c^3$ seront polynomiaux en $m$ de degrés au plus 2. De même $m(m-1)c^2c^{m-1}\Upsilon_{m-2}w_2$ contribue lui aussi de manière au plus quadratique en $m$. Et $m(m-1)(m-2)c^3c^{m-2}\Upsilon_{m-3}w_3$ ne contribue qu'un multiple de $m(m-1)$ au terme en $c^3$. Il en résulte que $\mathrm{A}(m)$, $\mathrm{B}(m)$, et $\mathrm{C}(m)$ sont tous trois des polynômes en $m$ au pire quadratique. Mais avec un logiciel de calcul formel ou à la main on vérifie les développements qui ont été donnés plus haut et qui donnent $\mathrm{A}(m) = \mathrm{B}(m) = 1$ pour $m = 4,5,6$, et $\mathrm{C}(m) = (m-2)/4$ pour $m = 4,5,6$. D'où (9). □

**Théorème 3.** *Il existe une constante absolue* K *(effective) telle que :*

$$m \geqslant 4, b \in \mathbb{N}, b \geqslant 2, c = b^{-1} \implies \left| v_m - \frac{b}{m+1} - 1 - c - \frac{1}{2}c^2 - \frac{m-2}{4}c^3 \right| \leqslant \mathrm{K}m^2c^4$$

*Démonstration.* On s'intéresse maintenant à l'écart $z_m$ entre $w_m = v_m - ((m+1)c)^{-1}$ et les quatre premiers termes du développement en puissances de $c$. On définit, y-compris pour $0 \leqslant m < 4$, $z_m$ par :

$$w_m = 1 + c + \frac{1}{2}c^2 + \frac{m-2}{4}c^3 + z_m$$

On a par (9) une majoration pour chaque $m \geqslant 4$ en $\mathrm{K}(m)c^4$ pour $0 \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}$ par exemple.

Le problème est l'uniformité en $m$. Nous l'établissons uniquement pour les $c$ de la forme $1/b$, $b$ entier au moins 2. Supposons donc $m > 4$ et qu'on ait établi une majoration de $|z_p|$ en $\mathrm{K}(p)c^4$ pour $4 \leqslant p < m$ pour une certaine fonction $\mathrm{K}(p)$, pour ces $c$.

On obtient la récurrence des $z_m$ à partir de (10) (où l'on rappelle $w_0 = 0$) :

$$w_m = 1 - \frac{c^m}{m+1} + c^{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\Upsilon_j w_{m-j}$$

$$\begin{aligned}1 + c + \frac{1}{2}c^2 + \frac{m-2}{4}c^3 + z_m = 1 - \frac{c^m}{(m+1)} &+ (1 + c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c^3)\mathrm{U}(m) + \frac{c^3}{4}\mathrm{V}(m)\\ &+ c^{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\Upsilon_j z_{m-j}\end{aligned}$$

avec (en utilisant le même raisonnement qui a donné (7)) :

$$\mathrm{U}(m) = c^{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\Upsilon_j = c^{m+1}\sum_{d=1}^{b-1}((d+1)^m - d^m) = c^{m+1}(b^m - 1) = c(1 - c^m)$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(m) = c^{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\binom{m}{j}\Upsilon_j &= mc^{m+1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\Upsilon_j\\ = mc^{m+1}(b^{m-1} + \Upsilon_{m-1} - 1) &= mc^2 + c\cdot mc^m\Upsilon_{m-1} - mc^{m+1}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(1 - c^m + c^{m+1})z_m = \frac{1}{2}c^2 &+ \frac{4-m}{4}c^3\\ &- c^{m+1}(1 + c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c^3) - \frac{c^m}{(m+1)} - \frac{1}{2}c^4 + \frac{c^3}{4}\mathrm{V}(m)\\ &+ c^2mc^{m-1}\Upsilon_{m-1}z_1 + c^3\binom{m}{2}c^{m-2}\Upsilon_{m-2}z_2 + c^{m+1}\sum_{j=1}^{m-3}\binom{m}{j}\Upsilon_j z_{m-j}\end{aligned} \tag{11}$$

On a pour nos $c$ et $m \geqslant 5$ : $0 < \mathrm{V}(m) < mc^2 + c \leqslant (\frac{1}{2}m+1)c$, qui est multiplié par $c^3/4$, donc une majoration en $\mathrm{B}_0 mc^4$ avec $\mathrm{B}_0$ une constante absolue. Les autres termes de la ligne intermédiaire donnent une contribution majorée par $\mathrm{A}_0 c^4$ pour une certain $\mathrm{A}_0$, pour $m \geqslant 5$. Donc en tout une majoration en $\mathrm{C}_0 mc^4$.

Considérons ensuite la dernière somme, toujours pour $m \geqslant 5$, mais en s'arrêtant à $j = m-4$. On peut majorer cette sous-somme, en valeur absolue, par

$$(\max_{4 \leqslant p < m} \mathrm{K}(p) c^4) \cdot c^{m+1} \sum_{j=1}^{m-4} \binom{m}{j} \gamma_j$$

Pour la contribution de $j = m-3$, il se trouve que $z_3$ possède un zéro triple à l'origine. Donc il existe une constante absolue $\mathrm{C}_3$ telle que $|z_3| \leqslant \mathrm{C}_3 |c|^3$ sur le disque de rayon $\frac{1}{2}$. En particulier ça vaut pour nos $c$ inverses d'entiers, et comme $c|z_3| \leqslant \mathrm{C}_3 c^4$ on peut combiner ce terme à la somme déjà majorée en mettant en facteur non plus $c^{m+1}$ mais $c^m$ et donc avec $\mathrm{K}_3(m) = \frac{1}{2}\max_{4\leqslant p<m} \mathrm{K}(p) + \mathrm{C}_3$ (on fait ici la somme plutôt qu'un maximum car c'est plus simple pour ajouter les autres termes d'erreur par la suite) on obtient une majoration :

$$\mathrm{K}_3(m) c^4 c^m \sum_{j=1}^{m-3} \binom{m}{j} \gamma_j \leqslant \mathrm{K}_3(m) c^4 c^m \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \gamma_j < \mathrm{K}_3(m) c^4$$

Regardons maintenant le terme $c^{m+1} m(m-1)\gamma_{m-2} z_2$. Il se trouve que $z_2$ a un zéro double à l'origine. Et on sait que $c^{m-1}(m-1)\gamma_{m-2}$ est positif et majoré par 1 (pour nos $c$!). Donc on obtient ici une majoration $\mathrm{C}_2 mc^4$ avec une certaine constante absolue $\mathrm{C}_2$.

En ce qui concerne le terme $c^{m+1} m\gamma_{m-1} z_1$ on procède plus finement. Ce terme contribue réellement au développement de Taylor de $z_m$ jusqu'à l'ordre 3 inclus. En effet $z_1 = -\frac{1}{2}c - c^2 + \mathrm{O}(c^3)$. Et d'après (7) on sait que

$$c^m m\gamma_{m-1} = 1 - \frac{m}{2}c + \theta \frac{m(m-1)}{12} c^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

On attire l'attention du lecteur sur le fait que ceci serait faux si l'on autorisait à $c$ des valeurs autres que celles spécifiées dans l'énoncé.

Ainsi nous obtenons du produit $c^{m+1} m\gamma_{m-1} z_1$ tout d'abord $cz_1(1 - \frac{m}{2}c)$ puis un terme supplémentaire qui est majoré par un $\mathrm{C}_1 m^2 c^4$ pour $\mathrm{C}_1$ une constante absolue. On a de plus avec une autre constante absolue $\mathrm{C}_1'$ :

$$\left| cz_1(1 - \frac{m}{2}c) - (-\frac{1}{2}c^2(1 + \frac{4-m}{2}c)) \right| \leqslant \mathrm{C}_1' mc^4$$

En effet on peut évaluer par la formule de Taylor avec reste de Lagrange qui fera intervenir une dérivée quatrième sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et comme la fonction considérée $cz_1 - \frac{m}{2} z_1 c^2$ dépend linéairement de $m$, on a le résultat ci-dessus.

Ceci donne donc une contribution $-\frac{1}{2}c^2 - \frac{4-m}{4}c^3 + \mathrm{O}(mc^4)$ qui vient opportunément compenser les seuls termes qui subsistaient dans (11) à l'ordre trois inclus.

Toutes les erreurs cumulées donnent un multiple $\mathrm{K}_0(m)c^4$ avec $\mathrm{K}_0(m)$ obtenu en additionnant à la moitié du maximum des $\mathrm{K}(p)$ précédents une quantité $\mathrm{T} + \mathrm{U}m + \mathrm{V}m^2$ avec des constantes absolues $\mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{V}$, que l'on peut donc englober dans un $\mathrm{W}m^2$ : pour $m \geqslant 5$, $\mathrm{K}_0(m) = \mathrm{W}m^2 + \frac{1}{2}\max_{4\leqslant p<m} \mathrm{K}(p)$.

Mais il reste à prendre en compte le facteur multiplicateur $(1 - c^m(1-c))^{-1}$. Pour $m \geqslant 5$ et $c \in [0, \frac{1}{2}]$ on peut le majorer par $64/63$. Ainsi une définition récurrente convenable de $\mathrm{K}(m)$

est :

$$m \geqslant 5 \implies \mathrm{K}(m) = \frac{64}{63}\Big(\frac{1}{2}\max_{4\leqslant p<m} \mathrm{K}(p) + \mathrm{W}m^2\Big) \tag{12}$$

Soit maintenant Z une constante choisie pour qu'à la fois $|z_4| \leqslant 16\mathrm{Z}c^4$ est vrai pour $|c| \leqslant \frac{1}{2}$ et par ailleurs $\mathrm{W} \leqslant \frac{31}{64}\mathrm{Z}$. Alors les quantités $\mathrm{K}(m)$ définies par $\mathrm{K}(4) = 16\mathrm{Z}$ et la récurrence (12) pour $m \geqslant 5$ vérifient $\mathrm{K}(m) \leqslant \mathrm{Z}m^2$. Et nous avons prouvé $|z_m| \leqslant \mathrm{K}(m)c^4$ pour $c = 1/b$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$. Ceci conclut la preuve. □

## 4. Fin de la démonstration

On passe maintenant à la démonstration du Théorème 1. On a donc d'après (4) et le Théorème 3 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(b,b-1) = \sum_{d=1}^{b-2}\frac{b}{d+1} &+ \Big(v_1 - \frac{1}{2}b - 1 - b^{-1} - \frac{1}{2}b^{-2} + \frac{1}{4}b^{-3}\Big)\sum_{d=1}^{b-2}\frac{1}{(d+1)^2}\\
&+ \Big(v_2 - \frac{1}{3}b - 1 - b^{-1} - \frac{1}{2}b^{-2}\Big)\sum_{d=1}^{b-2}\frac{1}{(d+1)^3}\\
&+ \Big(v_3 - \frac{1}{3}b - 1 - b^{-1} - \frac{1}{2}b^{-2} - \frac{1}{4}b^{-3}\Big)\sum_{d=1}^{b-2}\frac{1}{(d+1)^4}\\
&+ \sum_{d=1}^{b-2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b(m+1)^{-1} + 1 + b^{-1} + \frac{1}{2}b^{-2} + \frac{m-2}{4}b^{-3} + \mathrm{O}(m^2b^{-4})}{(d+1)^{m+1}}
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{m=1}^{\infty} m^2(d+1)^{-m-1} = d^{-2} + 2d^{-3}$ les termes en O donnent une contribution totale qui est $\mathrm{O}(b^{-4})$. Le terme initial et les séries infinies donnent pour chaque $d$ :

$$-b\log\Big(1-\frac{1}{d+1}\Big) + \Big(1 + b^{-1} + \frac{1}{2}b^{-2}\Big)\frac{1}{d(d+1)} + \frac{1}{4}b^{-3}\left(\frac{1}{d^2} - \frac{2}{(d+1)d}\right)$$

et en sommant sur les $d \in \{1,\dots,b-2\}$ cela donne

$$b\log(b-1) + \Big(1+b^{-1}+\frac{1}{2}b^{-2}-\frac{1}{2}b^{-3}\Big)\Big(1-\frac{1}{b-1}\Big) + \frac{1}{4b^3}\sum_{d=1}^{b-2}\frac{1}{d^2} = b\log(b) - \frac{1}{2b} - \frac{11}{6b^2} - \frac{13-\zeta(2)}{4b^3} + \mathrm{O}(b^{-4})$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
v_1 - \frac{1}{2}b - 1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{4b^3} &= -\frac{1}{2b} - \frac{1}{b^2} - \frac{3}{4b^3} + \mathrm{O}(b^{-4})\\
v_2 - \frac{1}{3}b - 1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{2b^2} &= -\frac{1}{3b^2} - \frac{1}{b^3} + \mathrm{O}(b^{-4})\\
v_3 - \frac{1}{4}b - 1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{4b^3} &= -\frac{1}{4b^3} + \mathrm{O}(b^{-4})
\end{aligned}$$

Donc à ce stade nous avons au total

$$\begin{aligned} b\log(b) - \frac{1}{2b} - \frac{11}{6b^2} - \frac{13-\zeta(2)}{4b^3} + \mathrm{O}(b^{-4}) \\ - \Big(\frac{1}{2b} + \frac{1}{b^2} + \frac{3}{4b^3} + \mathrm{O}(b^{-4})\Big)\Big(\zeta(2) - 1 - \sum_{n=b}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big) \\ - \Big(\frac{1}{3b^2} + \frac{1}{b^3} + \mathrm{O}(b^{-4})\Big)(\zeta(3) - 1 + \mathrm{O}(b^{-2})) \\ - \frac{1}{4b^3}(\zeta(4) - 1 + \mathrm{O}(b^{-3})) \end{aligned}$$

Et par ailleurs $\sum_{n=b}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{b-\frac{1}{2}} + \mathrm{O}(b^{-3}) = b^{-1} + \frac{1}{2}b^{-2} + \mathrm{O}(b^{-3})$.

Après avoir tenu compte de tous ces termes, la formule (1) du Théorème 1 apparaît.

La constante implicite est effective et on pourrait donner une majoration explicite de l'erreur. Dans la pratique voici quelques résultats numériques, les calculs des sommes de Kempner étant faits soit avec le code de Baillie [1, 2] soit avec celui de l'auteur [3, 4] qui utilise la formule (4) ou plutôt par défaut la variante de [3] donnant une série alternée spéciale.

| $b$ | 10 | 100 | 1000 |
|---:|---|---|---|
| $b\log(b)$ | 23,025 850 930 | 460,517 018 599 | 6 907,755 278 982 137 |
| $b\log(b) - \frac{c_1}{b}$ | 22,943 604 227 | 460,508 793 928 | 6 907,754 456 515 104 |
| $b\log(b) - \frac{c_1}{b} - \frac{c_2}{b^2}$ | 22,923 148 030 | 460,508 589 367 | 6 907,754 454 469 484 |
| $b\log(b) - \frac{c_1}{b} - \frac{c_2}{b^2} - \frac{c_3}{b^3}$ | 22,920 852 925 | 460,508 587 071 | 6 907,754 454 467 189 |
| K | 22,920 676 619 | 460,508 587 055 | 6 907,754 454 467 187 |

## Références


[1] Baillie, R.: Sums of reciprocals of integers missing a given digit. Amer. Math. Monthly **86**(5), 372–374 (1979) https://doi.org/10.2307/2321096

[2] Baillie, R.: Summing the curious series of Kempner and Irwin (2008). arXiv:0806.4410

[3] Burnol, J.-F.: Moments in the exact summation of the curious series of Kempner type (2024). arXiv:2402.08525

[4] Burnol, J.-F.: Measures for the summation of Irwin series (2024). arXiv:2402.09083

[5] Burnol, J.-F.: Digamma function and general Fischer series in the theory of Kempner sums (2024). arXiv:2403.03912

[6] Burnol, J.-F.: Un développement asymptotique des sommes harmoniques de Kempner-Irwin (2024). arXiv:2404.13763

[7] Farhi, B.: A curious result related to Kempner's series. Amer. Math. Monthly **115**(10), 933–938 (2008) https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920611

[8] Fischer, H.-J.: Die Summe der Reziproken der natürlichen Zahlen ohne Ziffer 9. Elem. Math. **48**(3), 100–106 (1993)

[9] Irwin, F.: A Curious Convergent Series. Amer. Math. Monthly **23**(5), 149–152 (1916) https://doi.org/10.2307/2974352

[10] Kempner, A.J.: A Curious Convergent Series. Amer. Math. Monthly **21**(2), 48–50 (1914) https://doi.org/10.2307/2972074
[11] Kløve, T.: Power sums of integers with missing digits. Math. Scand. **28**, 247–251 (1971) https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11021
[12] Segal, A.C., Lepp, B., Fine, N.J.: Problems and Solutions: Solutions of Elementary Problems: E2204. Amer. Math. Monthly **77**(9), 1009–1010 (1970) https://doi.org/10.2307/2318129

UNIVERSITÉ DE LILLE, FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, CITÉ SCIENTIFIQUE, F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE
*Adresse de courrier électronique*: jean-francois.burnol@univ-lille.fr