

Медленное убывание корреляций для типичных перемешивающих автоморфизмов

В.В. РЫЖИКОВ

Аннотация

Slow decay of correlations for generic mixing automorphisms. Given $\psi(n) \rightarrow +0$ and nonzero $f \in L_2(\mu)$, we prove that for the Alpern-Tikhonov generic mixing automorphism T of (X, μ) the set $\{n : |(T^n f, f)| > \psi(n)\}$ is infinite.

Для произвольной последовательности $\psi(n) \rightarrow +0$ и интегрируемой в квадрате ненулевой функции f для типичного относительно метрики Альперна-Тихонова перемешивающего автоморфизма T установлено медленное убывание корреляций относительно $\psi(n)$: неравенство $|(T^n f, f)| > \psi(n)$ выполняется для бесконечного множества значений n .

1 Введение

Пусть T – автоморфизм вероятностного пространства (X, μ) , мы также обозначаем через T отвечающий ему унитарный оператор в $L_2(\mu)$. В работах [2],[10] С. Альперн и С.В. Тихонов ввели полную метрику на множестве Mix всех перемешивающих автоморфизмов пространства (X, μ) . В связи с этим возникают задачи о типичности в смысле Бэра тех или иных свойств перемешивающих преобразований. Традиционно говорят "типичный автоморфизм обладает сингулярным спектром" (это доказано в [10]) вместо "все элементы некоторого плотного G_δ -множества обладают сингулярным спектром".

В заметке дан ответ на вопрос И.В. Подвигина о медленном убывании корреляций для типичного перемешивающего автоморфизма. Решение использует конструкции ранга один и метод аппроксимации перемешивающего преобразования неперемешивающими, изложенный в [7]. Свойство неперемешивающих преобразований (в нашем случае медленное убывание корреляций) наследуются предельным перемешивающим автоморфизмом. Теорема Баштанова [3] о плотности класса сопряженности в Mix позволяет из одного такого специального примера стандартным способом получить плотное G_δ -множество перемешивающих автоморфизмов с медленным убыванием корреляций.

В заключительной части заметки мы покажем, что гипотеза о перемешивающих преобразованиях из работы [6] неверна. Не только перемешивающие автоморфизмы, как это предполагала гипотеза, но все мягко перемешивающие автоморфизмы (и только они) не допускают сходимости ненулевых средних $\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} T^i f(x)$ со скоростью $o(\frac{1}{k_n})$.

Замечание. Отметим, что типичный перемешивающий автоморфизм обладает рангом один [3]. Автор предложил в [9] другой метод доказательства этого факта и получил аналогичный результат для перемешивающих потоков ([9], теорема 7.1). Из этого вытекает, что такие потоки обладают тривиальным централизатором. С учетом результатов работы [7] можно доказать, что для типичных перемешивающих автоморфизмов и потоков их симметрические тензорные степени имеют однократный спектр.

2 Убывание корреляций для типичных перемешивающих автоморфизмов

В силу эргодической теоремы следующее утверждение содержательно для функций f с нулевым средним, когда корреляции стремятся к 0.

Теорема 1. Пусть $0 \neq f \in L_2(\mu)$ и $\psi(n) \rightarrow +0$ при $n \rightarrow \infty$. Для типичного перемешивающего автоморфизма T множество $\{n : |(T^n f, f)| > \psi(n)\}$ бесконечно.

Отметим, что аналогичный результат справедлив для перемешивающих потоков. Напомним, как определяется метрика r на Mix , пространстве перемешивающих автоморфизмов. На группе $Aut(\mu)$ всех автоморфизмов задана метрика Халмоша ρ :

$$\rho(S, T) = \sum_i 2^{-i} \left(\mu(SA_i \Delta TA_i) + \mu(S^{-1}A_i \Delta T^{-1}A_i) \right),$$

где $\{A_i\}$ – некоторое фиксированное семейство, плотное в алгебре всех μ -измеримых множеств. Введем на $Aut(\mu)$ метрику d_w :

$$d_w(S, T) = \sum_{i,j} 2^{-i-j} |\mu(SA_i \cap A_j) - \mu(TA_i \cap A_j)|.$$

На Mix метрика r задается следующим образом:

$$r(S, T) = \rho(S, T) + \sup_{n>0} d_w(S^n, T^n).$$

В [10] доказано, что пространство (Mix, r) является полным и сепарабельным.

Чтобы найти типичное множество автоморфизмов с медленным убыванием корреляций, нам нужно предъявить пример такого автоморфизма. Говорим, что T обладает $(1 - \varepsilon)$ -перемешиванием, если всякий слабый предел его степеней T^{n_i} , $n_i \rightarrow \infty$, ограниченный на пространство функций с нулевым средним, имеет норму, не превосходящую ε . Отметим, что 1-перемешивание совпадает с обычным перемешиванием. Автоморфизм T обладает ε -жесткостью, если для некоторой последовательности $m_k \rightarrow \infty$ выполняется $T^{m_k} \rightarrow \varepsilon I$. Для автоморфизма T при одновременном выполнении свойств ε -жесткости и $(1 - \varepsilon)$ -перемешивания и функции f с нулевым средним имеем

$$(T^{m_k} f, f) \rightarrow \varepsilon(f, f).$$

Воспользовавшись методом работы [7], мы предъявим последовательность автоморфизмов T_k таких, что T_k обладает $(1 - \varepsilon_k)$ -перемешиванием и ε_k -жесткостью, $\varepsilon_k \rightarrow +0$. Для заранее фиксированного набора функций $f_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ будет выполнено $(T_k^{m_k} f_i, f_i) > \psi(m_k)$. Автоморфизмы T_k в смысле работы [7] аппроксимируют перемешивающий автоморфизм T , который наследует корреляции:

$$(T^{m_k} f_i, f_i) > \psi(m_k), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Сформулируем вспомогательные утверждения и выведем из них теорему.

Лемма 2. Пусть $\psi(n) \rightarrow +0$ и задана последовательность функций $f_k \in L_2(\mu)$, $\|f_k\| = 1$. Для некоторого перемешивающего автоморфизма T верно, что для всяких k , t найдется $n > t$, для которого

$$|(T^n f_i, f_i)| > \psi(n), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Лемму 2 докажем позже. Для доказательства теоремы нам понадобится ее частный случай, когда $f_k = J_k f$ для некоторых автоморфизмов J_k .

Лемма 3. Пусть $\psi(n) \rightarrow +0$, $\|f\|_2 = 1$ и задан счетный набор автоморфизмов J_i . Найдется перемешивающий автоморфизм T такой, что для любых k, t для некоторого $n > t$ выполнено

$$|(J_i^{-1} T^n J_i f, f)| > \psi(n), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство теоремы 1. Определим открытые в Mix множества

$$Y_m = \{T \in \text{Mix} : |(T^m f, f)| > \psi(m)\}$$

и G_δ -множество

$$G = \bigcap_{M} \bigcup_{m > M} Y_m.$$

Нам нужно доказать, что G плотно относительно метрики r . Пусть семейство $\{J_k\}$ плотно в $\text{Aut}(\mu)$ относительно метрики ρ . Рассмотрим перемешивающий автоморфизм T из леммы 3, тогда $\{J_k^{-1} T J_k\} \subset G$. Теорема Баштанова [3] утверждает, что класс сопряженности $\{J^{-1} T J : J \in \text{Aut}\}$ плотен в Mix . Но в нем плотно относительно метрики r семейство $\{J_k^{-1} T J_k : k \in \mathbf{N}\}$, что вытекает, например, из леммы 10 [10]. Поясним этот факт для полноты изложения. Из сходимости $J_{k'} \rightarrow_\rho J$ (здесь k' – некоторая последовательность) в силу неравенства

$$|\mu(T^n J_{k'} A_i \cap J_{k'} A_j) - \mu(T^n J A_i \cap J A_j)| \leq \mu(J_{k'} A_i \Delta J A_i) + \mu(J_{k'} A_j \Delta J A_j)$$

вытекает равномерная по n сходимость

$$\mu(T^n J_{k'} A_i \cap J_{k'} A_j) \rightarrow \mu(T^n J A_i \cap J A_j).$$

Получаем, что $J^{-1}TJ$ в метрике d_w , следовательно, и в метрике r приближается последовательностью $J_k^{-1}TJ_k$. Значит, семейство $\{J_k^{-1}TJ_k\}$ плотно в Mix . Множество G типично в Mix . Теорема доказана.

3 Конструкции ранга один

Для удобства читателя мы напомним определение преобразований ранга один. Из них мы позже выберем нужные примеры перемешивающих автоморфизмов T .

Фиксируем натуральное число $h_1 \geq 1$ (высота башни на этапе $j = 1$), последовательность $r_j \rightarrow \infty$ (число колонн, на которые виртуально разрезается башня этапа j) и последовательность целочисленных векторов (параметров надстроек)

$$\bar{s}_j = (s_j(1), s_j(2), \dots, s_j(r_j - 1), s_j(r_j)).$$

На шаге $j = 1$ задан полуинтервал C_1 . Пусть на шаге j определена система непересекающихся полуинтервалов $C_j, TC_j, \dots, T^{h_j-1}C_j$, причем на $C_j, \dots, T^{h_j-2}C_j$ преобразование T является параллельным переносом. Такой набор полуинтервалов называется башней этапа j , их объединение обозначается через X_j и тоже называется башней.

Представим C_j в виде дизъюнктного объединения полуинтервалов C_j^i , $i = 1, 2, \dots, r_j$, одинаковой длины. Для каждого $i = 1, 2, \dots, r_j$ рассмотрим так называемую колонну

$$C_j^i, TC_j^i, T^2C_j^i, \dots, T^{h_j-1}C_j^i.$$

К каждой колонне с номером i добавим $s_j(i)$ непересекающихся полуинтервалов (этажей) длины, равной длине интервала C_j^i . Полученные наборы интервалов при фиксированных i, j называем надстроенными колоннами $X_{i,j}$. Отметим, что при фиксированном j по построению колонны $X_{i,j}$ не пересекаются. Используя параллельный перенос интервалов, преобразование T теперь доопределим так, чтобы колонны $X_{i,j}$ имели вид

$$C_j^i, TC_j^i, \dots, T^{h_j}C_j^i, T^{h_j+1}C_j^i, \dots, T^{h_j+s_j(i)-1}C_j^i,$$

а верхние этажи колонн $X_{i,j}$ ($i < r_j$) преобразование T параллельным переносом отображало в нижние этажи колонн $X_{i+1,j}$:

$$T^{h_j+s_j(i)}C_j^i = C_j^{i+1}, \quad 0 < i < r_j.$$

Положив $C_{j+1} = C_j^1$, замечаем, что все указанные этажи надстроенных колонн в новых обозначениях имеют вид

$$C_{j+1}, TC_{j+1}, T^2C_{j+1}, \dots, T^{h_{j+1}-1}C_{j+1},$$

образуя башню этапа $j + 1$ высоты

$$h_{j+1} = h_j r_j + \sum_{i=1}^{r_j} s_j(i).$$

Частичное определение преобразования T на этапе j сохраняется на всех последующих этапах. В результате получаем пространство $X = \cup_j X_j$ и обратимое преобразование $T : X \rightarrow X$, сохраняющее стандартную меру Лебега μ на X .

4 Доказательство леммы 2. Вынуждение перемешивания

Известно, что в случае $r_j \rightarrow \infty$, $s_j(i) = i$, соответствующая лестничная конструкция S является перемешивающей [1], [9]. Пусть конструкция T похожа на S :

$$s_j(i) = i, \quad 1 \leq i \leq [(1 - \varepsilon_j)r_j], \quad 0 < \varepsilon_j < 1.$$

Для $i > [(1 - \varepsilon_j)r_j]$ параметры $s_j(i)$ выбираем произвольно, но будем считать, что высоты h_j у конструкций S и T одинаковы, т.е. суммы $\sum_{i=1}^{r_j} s_j(i)$ одинаковы для S и T .

Для нас важно, что при $\varepsilon_j \rightarrow +0$ конструкция T перемешивает, это доказывается так же, как и для лестничной конструкции S .

Частичная жесткость, частичное перемешивание.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon_j = \varepsilon$, рассмотрим конструкцию с параметрами

$$s_j(i) = i, \text{ если } 0 < i \leq [(1 - \varepsilon)r_j],$$

$$s_j(i) = v_j, \text{ если } [(1 - \varepsilon)r_j] < i < r_j,$$

$s_j(r_j)$ выбираем так, чтобы высоты h_j для T и S были одинаковы.

Указанная конструкция T обладает ε -жесткостью: если $\|f\| = 1$, $\int_X f d\mu = 0$, то

$$(T^{h_j + v_j} f, f) \rightarrow \varepsilon.$$

Вынуждение перемешивания. Пусть $\varepsilon_k \rightarrow +0$, фиксированные функции $f_1, f_2, \dots$. Мы находим последовательность конструкций T_k и возрастающую последовательность этапов j_k такую, что при $n > k$ параметры конструкций T_n и T_k одинаковы для всех $j \leq j_k$ при $m_k = h_{j_k} + v_{j_k}$ будет выполнено

$$(T_k^{m_k} f_i, f_i) > \psi(m_k), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (k)$$

Конструкция T по определению на всех этапах $j \leq j_k$ имеет те же параметры, что и конструкция T_k , поэтому она будет перемешивающей (напомним, что свойство перемешивания для нее доказывается также как и для обычной лестничной конструкции).

Благодаря произвольному выбору (сколь угодно быстро растущих) этапов j_k мы можем обеспечить выполнение неравенства (k) при подстановке T вместо T_k (автоморфизмы T и T_k отличаются на множестве такой малой меры, что неравенство сохраняется). Это завершает доказательство леммы 2.

5 Эргодические средние и мягкое перемешивание

Переформулируем слегка теорему 1 работы [6].

Теорема 2. Пусть для эргодического автоморфизма T , некоторой ненулевой функции $f \in L_1$ с нулевым средним и последовательности $k_n \rightarrow \infty$ для почти всех x выполнено

$$\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} T^i f(x) = o\left(\frac{1}{k_n}\right).$$

Тогда для почти всех x имеет место сходимость

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^{k_n} f(x) \rightarrow f(x).$$

В [6] показано, что перемешивающие автоморфизмы не удовлетворяют условиям теоремы 2, и высказана гипотеза о том, что этим свойством обладают только перемешивающие автоморфизмы. На самом деле этот класс существенно шире: он включает все мягко перемешивающие автоморфизмы, т.е. автоморфизмы без жесткого фактора (термин предложен в работе [4]). Отсутствие жесткого фактора означает отсутствие непостоянной функции $\chi \in L_1$ такой, что для некоторой $k_n \rightarrow \infty$ выполнено

$$\|T^{k_n} \chi - \chi\|_1 \rightarrow 0.$$

Покажем, что при выполнении условий цитируемой теоремы автоморфизм T не обладает мягким перемешиванием. Пусть последовательность функций $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^{k_n} f$ сходится к f п.в., тогда она сходится по мере. С учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим сходимость по норме:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^{k_n} f - f \right\|_1 \rightarrow 0, \tag{2}$$

что является несложным упражнением. Будем считать, что f - вещественная функция (общий случай сводится к этому стандартным способом). Пусть $A = \{x : a < f(x) < b\}$, причем выполнено $0 < \mu(A) < 1$. Так как $f \neq const$, такое множество A найдется. Из (2) вытекает, что

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^{k_n} \chi_A - \chi_A \right\|_1 \rightarrow 0.$$

Но это означает, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ для большинства индексов n выполнено $\|T^{k_n}\chi_A - \chi_A\|_1 < \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, выбираем последовательность $n(i)$ такую, что

$$\|T^{k_{n(i)}}\chi_A - \chi_A\|_1 \rightarrow 0, \quad k_{n(i)} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, T не является мягко перемешивающим. Замечаем также, что ограничение автоморфизма T на минимальную T -инвариантную сигма-алгебру, относительно которой измерима функция f , является жестким фактором. При наличии жесткого фактора быструю сходимость средних обеспечивают кограницы [6]. Подведем итог.

Теорема 3. *Эргодический автоморфизм T удовлетворяет условию теоремы 2 только в том случае, когда он обладает нетривиальным жестким фактором.*

Среди многообразия мягко перемешивающих автоморфизмов, не обладающих свойством перемешивания, классическим примером является преобразование Чакона [5]. Среди недавних примеров отметим пуассоновские надстройки над преобразованиями ранга один с полиномиальными слабыми пределами, предложенными в [8]. Частично жесткие автоморфизмы из §4 также перемешивают мягко, но доказательство этого факта требует значительных усилий.

Благодарности. Автор признателен рецензенту за замечания.

Список литературы

- [1] T.M. Adams, Smorodinsky’s conjecture on rank-one mixing, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 739-744
- [2] St. Alpern, Conjecture: In general a mixing transformation is not two-fold mixing, Ann. Probab., 13:1 (1985), 310-313
- [3] А.И. Баштанов, Типичное перемешивание имеет ранг 1, Матем. заметки, 93:2 (2013), 163-171;
A.I. Bashtanov, Generic Mixing Transformations Are Rank 1, Math. Notes, 93:2 (2013), 209-216
- [4] H. Furstenberg and B. Weiss, The finite multipliers of infinite transformation, Lecture Notes in Maths 688 Springer: 1978, 127-132.
- [5] A. del Junco, A.M. Rahe, L. Swanson, Chacon’s automorphism has minimal self-joinings, J. Analyse Math., 37 (1980), 276-284
- [6] И. В. Подвигин, О возможных оценках скорости поточечной сходимости в эргодической теореме Биркгофа, Сиб. матем. журн., 63:2 (2022), 379-390;
I.V. Podvigin, On possible estimates of the rate of pointwise convergence in the Birkhoff ergodic theorem, Siberian Math. J., 63:2 (2022), 316-325
- [7] В.В. Рыжиков, Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1, Матем. сб., 198:5 (2007), 137-159;
V.V. Ryzhikov, Weak limits of powers, simple spectrum of symmetric products, and rank-one mixing constructions, Sb. Math., 198:5 (2007), 733-754

- [8] В. В. Рыжиков, Слабое замыкание бесконечных действий ранга 1, присоединения и спектр, Матем. заметки, 106:6 (2019), 894-903;
V.V. Ryzhikov, Weak Closure of Infinite Actions of Rank 1, Joinings, and Spectrum, Math. Notes, 106:6 (2019), 957-965
- [9] В.В. Рыжиков, О сохраняющих меру преобразованиях ранга один, Тр. ММО, 81:2 (2020), 281-318;
V.V. Ryzhikov, Measure-preserving rank one transformations, Trans. Moscow Math. Soc., 81:2 (2020), 229-259
- [10] С.В. Тихонов, Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований, Матем. сб., 198:4 (2007), 135-158;
S.V. Tikhonov, A complete metric in the set of mixing transformations, Sb. Math., 198:4 (2007), 575-596

V. V. Ryzhikov

Generic correlations and ergodic averages for strongly and mildly mixing automorphisms

For a sequence $\psi(n) \rightarrow +0$ and a square integrable non-zero function f for the generic mixing automorphisms T the set $\{n : |(T^n f, f)| > \psi(n)\}$ is infinite. The mildly mixing automorphisms T do not have a convergence of nonzero averages $\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} T^i f(x)$ with the rate $o\left(\frac{1}{k_n}\right)$.

Key words: correlations, ergodic averages, generic mixing automorphisms, partial and mild mixing, partial rigidity.