

La relation entre $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ et $\zeta(4n - 1 - 2p)$

MUNDANKULU KABONGO

RÉSUMÉ. La relation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann ne nous fournit, ni la nature ni l'expression, de zêta aux impairs positifs. A partir de la fonction $F(z) = \frac{z^{-2n}}{e^z - 1}$ à variable complexe z , nous trouvons une relation fonctionnelle impliquant $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ et $\zeta(4n - 1 - 2p)$. Elle est donnée par :

$$\zeta(4n - 1) = \frac{1}{2n - 1} \sum_{p=1}^{2n-2} \zeta(2p)\zeta(4n - 1 - 2p). \quad (0.1)$$

$n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

De cette formule nous introduisons une nouvelle approche pour étudier la nature de zêta à ces entiers.

ABSTRACT. The functional relation of the Riemann zeta function provides us with neither the nature nor the expression of zeta at positive odd numbers. From the function $F(z) = \frac{z^{-2n}}{e^z - 1}$, we find a functional relation involving $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ and $\zeta(4n - 1 - 2p)$. It is given by :

$$\zeta(4n - 1) = \frac{1}{2n - 1} \sum_{p=1}^{2n-2} \zeta(2p)\zeta(4n - 1 - 2p). \quad (0.2)$$

$n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

From this formula we introduce a new approach to study the nature of zeta on these integers.

1. Introduction

En effet, la fonction zêta de Riemann obéit à la relation fonctionnelle $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$. Nous ne savons y tirer une expression ou la nature de zêta aux entiers impairs positifs. Nous contournons la difficulté qui apparaît ; en se servant de la fonction à variable complexe :

$$F(z) = \frac{z^{-2n}}{e^z - 1} \quad (1.1)$$

Ci-bas, en dérivant $F(z)$, et au moyen d'une démonstration, nous parvenons à obtenir la relation de $\zeta(4n - 1)$; avec $n = 2, 3, 4, \dots$

Puis nous avons introduit une nouvelle approche pour l'étude de la nature de $\zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(4n - 1)$

Nous avons un demi cercle de rayon infini avec une infinité des poles. Ces poles sont $z = 2\pi j.p$ avec $p = 1, 2, 3, 4, \dots$. Nous avons tracé le demi cercle comme sur la figure ci-dessous, dans le but de pouvoir avoir une analyticité de $F(z)$. Nous avons trouvé l'expression :

$$\zeta(4n - 1) = \frac{1}{2n - 1} \sum_{p=1}^{2n-2} \zeta(2p)\zeta(4n - 1 - 2p) \quad (1.2)$$

$n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

De cette relation, nous obtenons :

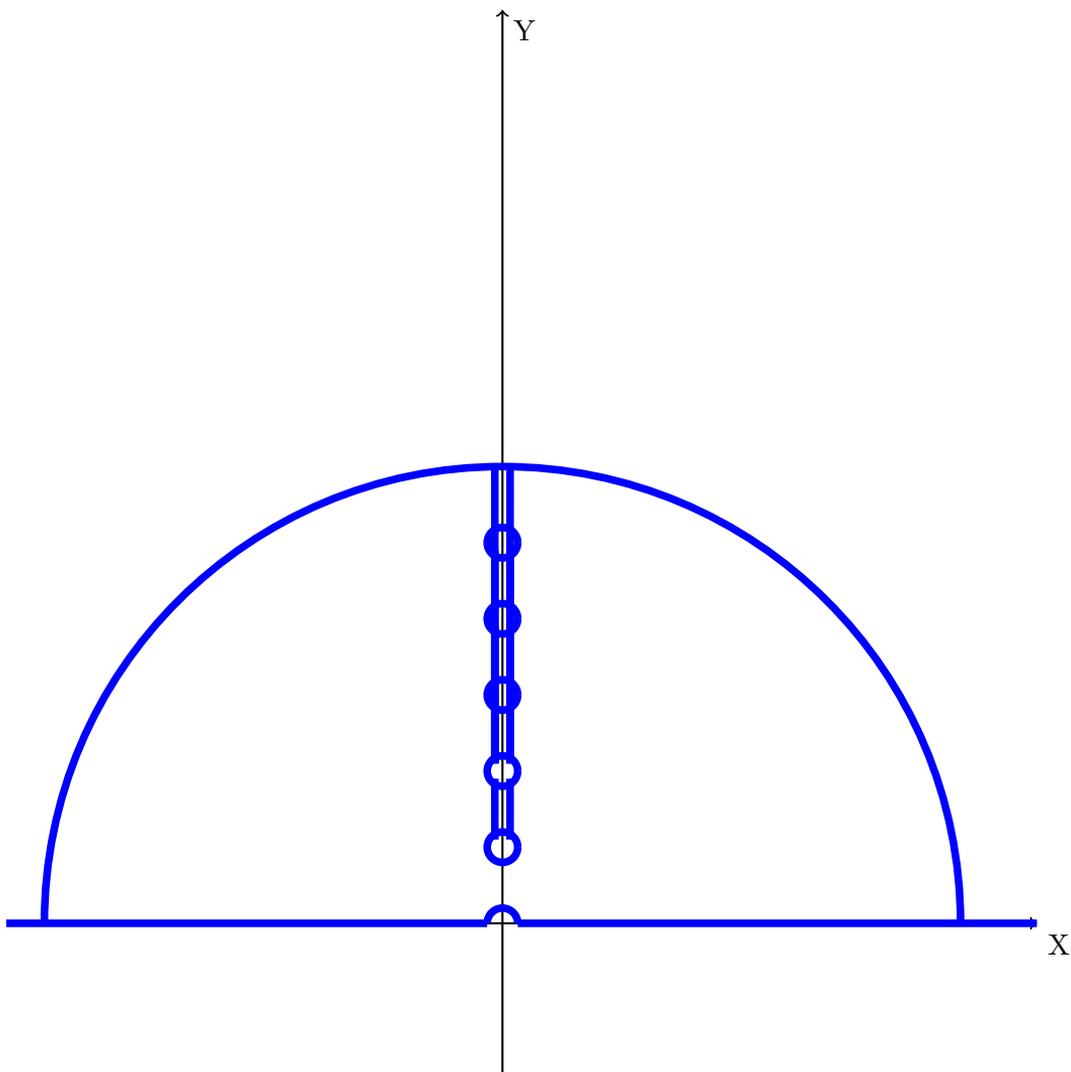
$$B_{4n-1} = \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{A_{2p}}{2n - 1} \cdot B_{(4n-1-2p)}. \quad (1.3)$$

Ceci nous permettra d'étudier zêta par les constantes $B_{4n-1} = \frac{\zeta(4n-1)}{\pi^{4n-1}}$, $\frac{A_{2p}}{2n-1}$ et $B_{4n-1-2p} = \frac{\zeta(4n-1-2p)}{\pi^{4n-1-2p}}$

$$A_{2p} = \frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}} \quad (1.4)$$

Ci-dessous la figure d'appui et la démonstration de $\zeta(4n - 1)$. Notre domaine de calculs est $AabBGHIJA$. $F(z)$ est holomorphe dans ce domaine. Le positif est compté dans le sens antihoraire.

LA RELATION ENTRE $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ ET $\zeta(4n - 1 - 2p)$



Remarque 1.1. Le demi cercle a un rayon égal à l'infini. Le point A a pour coordonnées $(-\infty, 0)$ et le point B a pour coordonnées $(+\infty, 0)$.

2. Démonstration de $\zeta(4n - 1)$

Prenons la fonction $F(z)$ et dérivons-la par rapport à z , on aura :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z^{-2n}}{e^z - 1} \right) = -2n \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} - \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z \quad (2.1)$$

Comme $F(z)$ est holomorphe dans ce domaine, sa dérivée l'est aussi et on la note par petit f :

$$f(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{-2n}}{e^z - 1} \right) = -2n \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} - \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z \quad (2.2)$$

Intégrons sur le chemin $AUVB$, les deux membres de l'équation ci-dessus. On aura :

$$\int_{AUVB} f(z) dz = -2n \int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz - \int_{AUVB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.3)$$

Le point A tend vers les coordonnées $(-\infty, 0)$

Le point B tend vers les coordonnées $(+\infty, 0)$

Le membre de gauche de (2.3) sera :

$$F(z) \Big|_{(-\infty, 0)}^{(+\infty, 0)} = 0 \quad (2.4)$$

La relation (2.3) devient :

$$0 = -2n \int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz - \int_{AUVB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.5)$$

LA RELATION ENTRE $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ ET $\zeta(4n - 1 - 2p)$

$$2n \int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz = - \int_{AUVB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.6)$$

Puis on a :

$$\int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz = -\frac{1}{2n} \int_{AUVB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.7)$$

On sait par ailleurs que :

$$Q_n = \oint_{AUVBGHIJA} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (2.8)$$

est nulle sur ce contour fermé.

Donc :

$$0 = \int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz + \int_{BG} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz + \int_{GHIJ} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz + \int_{JA} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (2.9)$$

Comme le rayon du demi cercle tend vers l'infini, alors le deuxième et le quatrième terme sont nuls. Nous avons donc :

$$0 = \int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz + \int_{GHIJ} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (2.10)$$

En réarrangeant la relation on a :

$$\int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz = - \int_{GHIJ} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (2.11)$$

En changeant le sens GHIJ en JIHG on a :

$$\int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz = \int_{JIHG} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (2.12)$$

Le membre de droite de (2.12) est :

$$(2\pi j) \sum_{p=1}^{\infty} (2\pi j \cdot p)^{-2n-1} \quad (2.13)$$

On a donc :

$$\int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{(-)^n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \zeta(2n + 1) \quad (2.14)$$

En réécrivant la relation (2.7) on a :

$$\int_{AUVB} \frac{z^{-2n-1}}{e^z - 1} dz = -\frac{1}{2n} \int_{AUVB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.15)$$

La relation (2.14) dans (2.15) on a :

$$\frac{(-)^n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \zeta(2n + 1) = -\frac{1}{2n} \int_{AUVB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.16)$$

Celui qui integre sur le chemin AUVB, c'est la même chose que celui qui integre sur AabB, car cette intégrale ne dépend pas du chemin. Donc on peut écrire :

$$\frac{(-)^n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \zeta(2n + 1) = -\frac{1}{2n} \int_{AabB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.17)$$

Et on a :

$$\int_{AabB} \frac{z^{-2n}}{(e^z - 1)^2} e^z dz > 0$$

LA RELATION ENTRE $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ ET $\zeta(4n - 1 - 2p)$

Pour conserver l'égalité des signes ; à gauche et à droite de (2.17), alors il faut remplacer n par $2n - 1$

$$\frac{(-)^{2n-1}}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n - 1) = -\frac{1}{4n - 2} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n - 1) = \frac{1}{4n - 2} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2}}{(e^z - 1)^2} e^z dz \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n - 1) = \frac{1}{4n - 2} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2}}{(e^z - 1)} \left(\frac{e^z}{e^z - 1} \right) dz \quad (2.20)$$

On sait que :

$$\left(\frac{e^z}{e^z - 1} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mz} \quad (2.21)$$

La relation (2.21) dans (2.20) alors on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n - 1) = \frac{1}{4n - 2} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2}}{(e^z - 1)} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mz} dz \quad (2.22)$$

Par ailleurs l'exponentielle e^{-mz} s'écrit :

$$e^{-mz} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m^p z^p}{p!} \quad (2.23)$$

La relation (2.23) dans (2.22) alors :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2}}{(e^z-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m^p z^p}{p!} dz \quad (2.24)$$

On permute le signe intégrale avec les sommations ; et on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p m^p}{p!} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2+p}}{(e^z-1)} dz \quad (2.25)$$

Comme le membre de gauche de la relation ci-dessus est un nombre réel, alors nous devons éliminer tous les complexes du membre de droite. Noter que les valeurs (termes) complexes proviennent des valeurs paires de la variable muette p . Nous écrivons la relation seulement pour les p impaires. On a donc :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p-1} m^{2p-1}}{(2p-1)!} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+2+2p-1}}{(e^z-1)} dz \quad (2.26)$$

Puis on élimine tous les couples (m, p) tels que $m = 0$, à cause que les termes correspondants sont nuls. La sommation des m va commencer donc à $m = 1$. On aura donc :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p-1} m^{2p-1}}{(2p-1)!} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+1+2p}}{(e^z-1)} dz \quad (2.27)$$

On écrit donc :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \sum_{p=1}^{\infty} -\frac{\zeta(-2p+1)}{(2p-1)!} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+1+2p}}{(e^z-1)} dz \quad (2.28)$$

LA RELATION ENTRE $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ ET $\zeta(4n - 1 - 2p)$

On sait que :

$$\zeta(-2p + 1) = \frac{-B_{2p}}{2p} \quad (2.29)$$

(2.29) dans (2.28) alors on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n - 1) = \frac{1}{4n - 2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} \int_{AabB} \frac{z^{-4n+1+2p}}{(e^z - 1)} dz \quad (2.30)$$

L'intégrale dans cette relation devient :

$$\int_{AabB} \frac{z^{-4n+1+2p}}{(e^z - 1)} dz = (2\pi j)^{-4n+2+2p} \zeta(4n - 1 - 2p) \quad (2.31)$$

L'intégrale ci-dessus a du sens seulement si $\alpha = -4n + 1 + 2p < -1$. Ceci à cause de la conjonction de deux raisons :

$\alpha = -1$ on a $\zeta(1)$ (L'intégrale diverge)

$\alpha > -1$ alors l'intégrale diverge aussi, car le point A . est à moins l'infini.

On écrit : $-4n + 1 + 2p < -1$.

Cela implique $p \leq 2n - 2$; on aura donc :

(2.31) dans (2.30) on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n - 2} \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{B_{2p}}{(2p)!} (2\pi j)^{-4n+2+2p} \zeta(4n-1-2p) \quad (2.32)$$

On a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n-2}} \cdot \zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{B_{2p}}{(2p)!} (2\pi)^{-4n+2+2p} (j)^{-4n+2+2p} \zeta(4n-1-2p) \quad (2.33)$$

$$\zeta(4n-1) = \frac{1}{4n-2} \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{B_{2p}}{(2p)!} (2\pi)^{2p} (j)^{-4n+2+2p} \zeta(4n-1-2p) \quad (2.34)$$

$$\zeta(4n-1) = \frac{1}{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{B_{2p}}{2(2p)!} (2\pi)^{2p} (j)^{-4n+2+2p} \zeta(4n-1-2p) \quad (2.35)$$

$$\zeta(4n-1) = \frac{1}{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{B_{2p}}{2(2p)!} (2\pi)^{2p} (-1)^{-2n+1+p} \zeta(4n-1-2p) \quad (2.36)$$

$$\zeta(4n-1) = \frac{1}{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{B_{2p}}{2(2p)!} (2\pi)^{2p} (-1)^{1+p} \zeta(4n-1-2p) \quad (2.37)$$

$$\zeta(4n-1) = \frac{1}{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-2} \zeta(2p) \zeta(4n-1-2p) \quad (2.38)$$

LA RELATION ENTRE $\zeta(4n - 1)$, $\zeta(2p)$ ET $\zeta(4n - 1 - 2p)$

3. Nouvelle approche pour étudier la nature de zeta aux impairs positifs

Définissons

$$\frac{\zeta(4n - 1)}{\pi^{4n-1}} = B_{4n-1} \quad (3.1)$$

$$\frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}} = A_{2p} \quad (3.2)$$

$$\frac{\zeta(4n - 1 - 2p)}{\pi^{4n-1-2p}} = B_{4n-1-2p} \quad (3.3)$$

Remarque 3.1. On sait que A_{2p} est rationnelle

Ces trois définitions dans (2.38) alors on écrit :

$$B_{4n-1} = \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{A_{2p}}{2n-1} \cdot B_{4n-1-2p} \quad (3.4)$$

Au lieu d'étudier la nature de $\zeta(4n - 1 - 2p)$ directement, nous suggérons d'étudier d'abord celles de $B_{4n-1-2p}$ et B_{4n-1} ; $n = 2, 3, 4, \dots$ à partir de la relation ci-dessus.

En effet, on peut écrire la relation :

$$B_{4n-1} = \sum_{p=1}^{2n-2} \frac{A_{2p}}{2n-1} \cdot B_{4n-1-2p} \quad (3.5)$$

sous forme matricielle comme suite :

$$\begin{pmatrix} B_{4n-1} \\ B_{4n-5} \\ B_{4n-7} \\ \dots \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_2}{2n-1} & \frac{A_4}{2n-1} & \frac{A_6}{2n-1} & \dots & \frac{A_{4n-4}}{2n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{4n-3} \\ B_{4n-5} \\ B_{4n-7} \\ \dots \\ B_3 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessus est une matrice triangulaire. On sait qu'une matrice triangulaire a pour déterminant le produit des éléments diagonaux.

Comme aucun de ces éléments n'est nul, alors cette matrice est toujours inversible et les deux familles (colonnes) ci-dessus ont la même nature ; dépendante et dépendante (ou indépendante et indépendante). Nous parlons ici bien sûr de la dépendance et de l'indépendance linéaire.

4. Conclusion

Nous avons trouvé la fonctionnelle :

$$\zeta(4n - 1) = \frac{1}{2n - 1} \sum_{p=1}^{2n-2} \zeta(2p)\zeta(4n - 1 - 2p) \quad (4.1)$$

$n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Elle est jusque-là, la formule condensée de zeta aux impairs positifs. A partir d'elle, nous avons introduit une nouvelle démarche pour arriver à étudier la nature de zeta à ces entiers. La relation (3.5) nous montre que les constantes $B_3, B_5, \dots, B_{4n-3}$ cachent une propriété pour $\zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(4n - 3)$; $n = 2, 3, \dots$

5. Références

Nous avons préféré les démonstrations que la citation des références.

MUNDANKULU KABONGO
Laboratoire de Recherche Lamunda
Sherbrooke / Québec / Canada
mundankulu.kabongo@gmail.com