Des croquis comme support de raisonnement et de changement de registres

D. Grenier, C. Menini, P. Sénéchaud & F. Vandebrouck avec la CIIU

arXiv:2404.11626v1 [math.HO] 15 Apr 2024

Abstract. We are convinced of the usefulness of sketches and diagrams during mathematical work but the observation is made in our practices that they are not spontaneously used by students. In order to study the understanding and use of sketches by mathematics students, we designed and then proposed a test at different university levels. The test consists of five exercises. The first concerns different representation registers of a set of numbers, the second on a graphic proof of an implicative algebraic proposition and the last three on the graphic approch to the notions of injectivity, surjectivity, bijectivity in the context of the analysis. The sketches, proposed or requested in each exercise, are intended to be aids to changes of register and reasoning. We present what motivated the choices and developments of the exercises then we analyze the results of these tests. In each case, we see difficulties in understanding and the sketches proposed, which leads to think that the sketch must be the subject of specific work at the university level.

Keywords. Diagram, Sketche, Representation register, Didactic of mathematics

Résumé. Nous sommes convaincus de l'utilité des croquis et schémas lors du travail mathématique mais le constat est fait dans nos pratiques qu'ils ne sont pas spontanément utilisés par les étudiants. Afin d'étudier la compréhension et l'utilisation de croquis par des étudiants en mathématiques, nous avons conçu puis proposé un test à différents niveaux universitaires. Le test comporte cinq exercices. Le premier porte sur différents registres de représentation d'un ensemble de nombres, le deuxième sur une preuve graphique d'une proposition algébrique implicative et les trois derniers sur l'approche graphique des notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité dans le cadre de l'analyse. Les croquis, proposés ou demandés dans chaque exercice, se veulent être des aides aux changements de registre et au raisonnement. Nous présentons ce qui a motivé les choix et évolutions des exercices puis nous analysons les résultats de ces tests. On constate dans chaque cas des difficultés à la compréhension et à l'appropriation des croquis proposés, ce qui conduit à penser que le croquis doit être l'objet d'un travail spécifique au niveau universitaire.

Mots-Clés. Croquis, Schéma, Registre de représentation, Didactique des mathématiques

Table des matières

1. Introduction **2**

2. Différents registres de représentation d'un ensemble de nombres **4**
2.A. Présentation de l'exercice 1 et analyse *a priori* 4
2.B. Analyse *a posteriori* 6
2.C. Conclusion pour l'exercice 1 10

3. Preuve graphique d'une proposition algébrique implicative **10**
3.A. Présentation de l'exercice 2 et analyse *a priori* 10
3.B. Analyse *a posteriori* 11
3.C. Suggestions d'évolution de l'exercice 2 14
3.D. Conclusion pour l'exercice 2 15

4. Différents registres pour les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité dans le cadre de l'analyse **15**
4.A. Présentation des exercices 3, 4 et 5 et analyse *a priori* 15
4.B. Analyse *a posteriori* 18
4.C. Suggestions d'évolution des exercices 3-4-5 21
4.D. Conclusion pour les exercices 3-4-5 22

5. Conclusion **22**

Annexe A Fiches du test **24**

Références 30

1. Introduction

La Commission Inter IREM Université (CIIU) permet la rencontre d'universitaires en mathématiques et didactique des mathématiques qui partagent leurs diverses compétences sur l'enseignement. Un de ses thèmes de réflexion est l'étude du rôle des schémas et croquis qui sont des registres de représentation sémiotique importants pour la construction de connaissances opératoires et pérennes. Notre réflexion, à son origine, concernait l'utilisation, dans nos pratiques, d'esquisses rapides comportant un codage de ce qu'on veut mettre en avant à un moment précis d'un cours ou de le la résolution d'un exercice. Qu'en retiennent les étudiants et s'en emparent-ils ?

Le constat est fait que les croquis, les dessins et les schémas ne sont pas naturellement mobilisés par une majorité d'étudiants ou d'étudiantes pour aborder un problème ou représenter une notion mathématique. Nous faisons l'hypothèse de leur utilité en ce qu'ils peuvent contribuer au développement d'une image mentale sur laquelle s'appuyer et qu'ils apportent des outils qui rendent opérationnelle la notion à appéhender. Ils peuvent aussi permettre à l'enseignant de déceler des lacunes, à l'étudiant de conjecturer, vérifier et corriger les arguments de son raisonnement. Mais ils peuvent aussi être source d'ambiguïté dans l'échange entre étudiants et enseignants.

L'usage des dessins et des représentations a déjà fait l'objet d'études : en particulier dans l'articulation entre algèbre linéaire et géométrie (Gueudet, 2004), et dans la différence entre figure et dessin (Laborde & Capponi, 1994) et (Parzysz, 1988) ou encore dans les travaux de R.Duval (Duval, 1993) où le concept de figure est relié à la notion d'objet mathématique et où le dessin en est une représentation.

Une première analyse issue du travail de la CIIU se trouve dans (Menini & Sénéchaud, 2018) dans laquelle sont donnés des exemples où les croquis, dessins et autres représentations peuvent aider les étudiants dans leurs apprentissages. Suite à ce premier travail, des expérimentations ont été menées afin de tester la compréhension et le rôle de certains croquis dans la résolution de problèmes.

Nous avons construit un test que vous trouverez en annexe A. Pour mettre en place ce test, nous avons travaillé en amont sur différentes versions, ce qui a permis un enrichissement de l'analyse *a priori* .

Le test a été proposé au niveau L2 [1] mathématiques à Strasbourg (19 copies), en L3 [2] mathématiques à Bordeaux (11 copies), en L3 préprofessionalisation MEEF [3] à Limoges (7 copies) et en M1 MEEF [4] à Poitiers (8 copies). À chaque fois, le test a été posé sans préparation préalable afin de mesurer au plus près ce qui fait partie des connaissances disponibles des étudiants et de leurs habitudes de travail.

Nous présentons une analyse de ce test et les résultats des travaux menés par la CIIU.

Soulignons ici l'importance des croquis dans d'autres sciences comme par exemple en sciences de la vie et en géographie [5]. En scicence de la vie, le **dessin** est une représentation la plus fidèle possible de l'objet étudié avec tous ses détails, un **croquis** est un dessin simplifié sans détails pour comprendre la constitution et les éléments à étudier et enfin **le schéma** formé de formes et de flèches pour expliquer la structure ou le fonctionnement de ce que l'on représente [6].

En mathématiques, on peut reprendre la classification des sciences et vie de la terre : un dessin est alors une représentation la plus complète possible de l'objet, un croquis est une représentation

1. Deuxième année universitaire
2. Troisième année universitaire
3. Métiers de l'Enseignement de l'Education et de la Formation
4. Première année de Master d'enseignement
5. https://actu-hg.hatier.fr/sites/default/files/Le%20croquis%20en%20Geo_0.pdf
6. https://louisa-paulin.ecollege.haute-garonne.fr/espaces-pedagogiques/svt/fiches-methodologiques/comparaison-dessin-croquis-schema-46406.htm

qui cherche à illustrer une caractéristique ou propriété particulière de l'objet d'étude et un schéma s'attache à montrer des relations, ou des articulations importantes pour l'étude de l'objet considéré (voir figure 1 et figure 2). On pourra également noter que le schéma permet de mettre en avant des propriétés génériques de l'objet.

En plus de savoir manipuler de telles représentations, il est également essentiel de savoir les articuler et en changer si besoin pour trouver celle la mieux adaptée à ce que l'on étudie ou à ce que l'on veut expliquer. Savoir changer de registres est un élément important dans l'apprentissage et la transmission des mathématiques : le test présenté permet d'étudier en partie ce savoir-faire.

Ci-dessous, on peut cataloguer la représentation de gauche dans la figure 1 comme un dessin, qui est assez précis et contient les éléments de construction. À droite, il s'agit d'un croquis qui consiste à montrer les changements de concavité et les points de contrôle(Sales & Banyuls, 2013).

Dans la figure 2, nous avons deux croquis : celui de gauche illustrant la propriété de symétrie entre le tracé du graphe d'une fonction et de celui de sa réciproque dans un repère orthonormé, celui de droite illustrant la construction d'une bijection entre deux ensembles dénombrables(Escoffier, 2022).

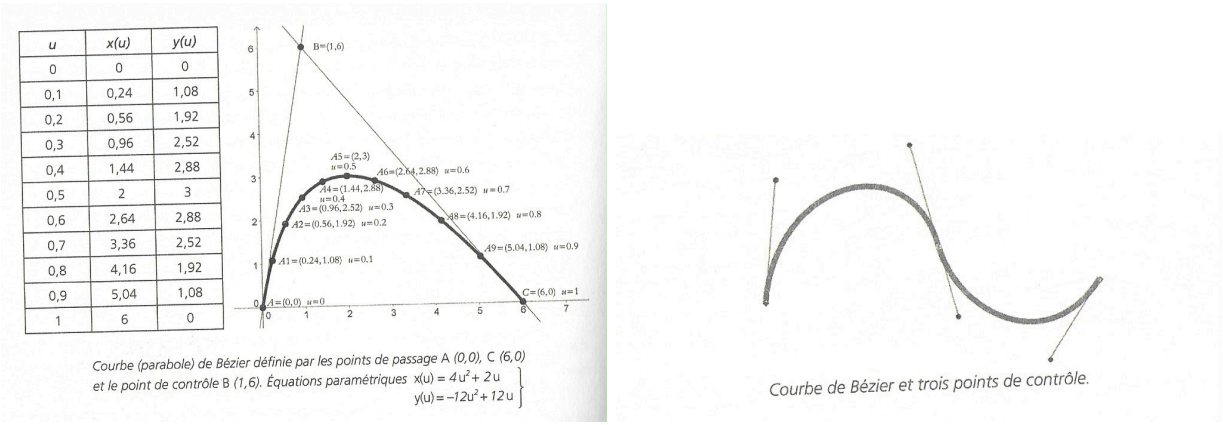


FIGURE 1 – Un dessin / Un croquis

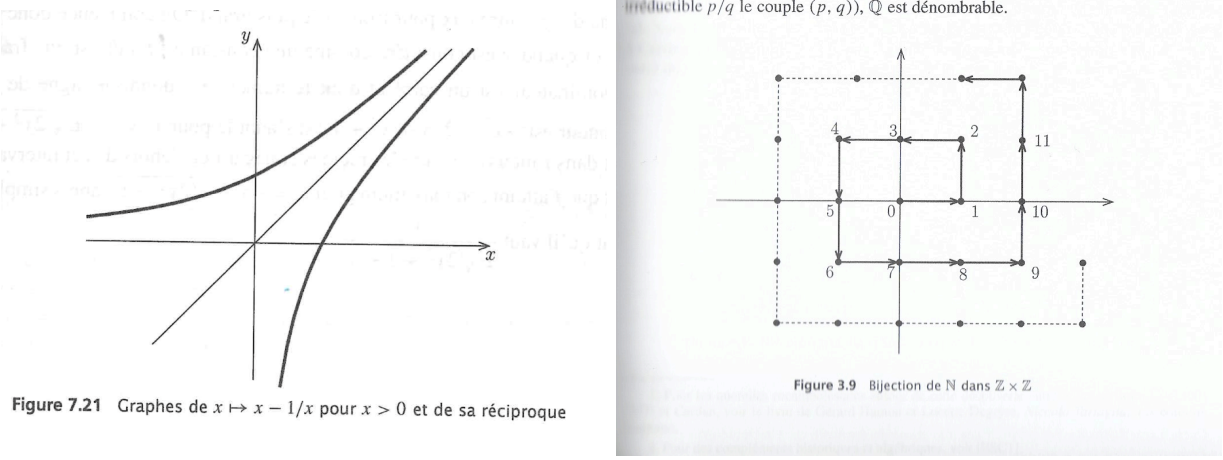


FIGURE 2 – Des croquis

Dans la figure 3, nous proposons trois représentations du tore : un dessin et deux schémas. Celle de gauche est le dessin d'un tore (Wikipedia : domaine public), celle du milieu schématise la construction par rotation du tore et celle de droite schématise le 2-Tore par recollement des côtés opposés d'un carré (Wikipedia : domaine public).

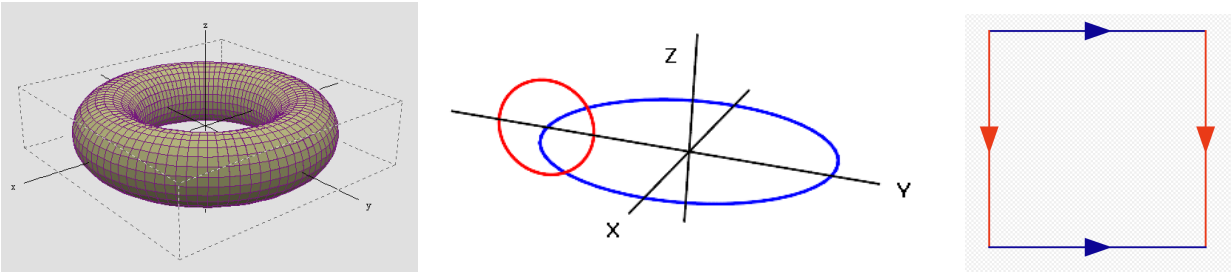


FIGURE 3 – Un dessin / Deux schémas

Nous pouvons faire le parallèle avec les représentations mobilisées auprès des élèves et des étudiants lors de l'étude d'une fonction : on peut leur demander une représentation très soignée (en utilisant éventuellement un logiciel), ou encore l'allure de la courbe avec quelques points significatifs et quelques tangentes ou encore le tableau des variations qui est une autre représentation.

Le test proposé est composé de deux parties, une première qui conduit à un travail sur les notions de valeur absolue, distance et intervalles et une deuxième dans laquelle le travail demandé fait appel aux notions d'injectivité et de surjectivité pour des fonctions numériques à variable réelle. Ces notions ont été choisies en raison de leur place prépondérante au début d'un cursus universitaire classique (Licence généraliste en sciences). Pour chacune de ces deux parties, constituée de plusieurs exercices, nous allons motiver le choix des notions traitées, donner une analyse *a priori* qui correspond à ce à quoi on pourrait s'attendre tant en terme de difficultés que de réussites et proposer une analyse des travaux des étudiants. Dans la conclusion de ces études nous proposons également des pistes d'amélioration des tests en fonction de ce qui est constaté.

2. Différents registres de représentation d'un ensemble de nombres

2.A. Présentation de l'exercice 1 et analyse *a priori*

Dans le premier exercice proposé, il s'agit de remplir des cases dans un tableau où chaque colonne correspond à un registre différent de représentation d'un ensemble de nombres. Il s'agit d'évaluer la capacité à passer d'un registre à un autre en mobilisant les notions de valeur absolue, d'intervalle et de distance entre deux réels.

La valeur absolue est au programme au début de lycée général et technologique. On peut lire dans les programmes de seconde (annexe du BO Numéro 1 du 22/01/2019) partie « nombres et calculs » :

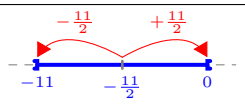
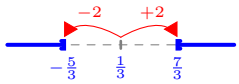
- *La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres réels et caractériser les intervalles de centre donné.* (alinéa manipuler les nombres réels)
- *Notation* $|a|$. *Distance entre deux nombres réels. Représentation de l'intervalle* $[a-r, a+r]$ *puis caractérisation par la condition* $|x-a| \leq r$ (alinéa contenus).

La mise en relation entre ces deux notions (valeurs absolue et distance entre deux réels) est indispensable en L1 [7] dès lors que sont travaillées les notions de limite et de continuité. Nous émettons, par ailleurs, l'hypothèse que si ce lien est bien construit en première année, il permet d'aborder, plus tard, certaines notions de topologie avec plus de facilité.

7. Première année d'université

On identifie le point d'abscisse x avec le réel x. Les colonnes correspondent à des registres différents. Les colonnes 1 et 2 font appel au registre algébrique, la colonne 3 au registre graphique et les colonnes 4 et 5 au registre géométrique, comme l'indique les intitulés des colonnes. Le tableau compte huit lignes à remplir et sur chaque ligne, une case est pré-remplie : aux étudiants de compléter, dans l'ordre qu'ils préfèrent et en numérotant les cases dans l'ordre de remplissage. Sur la première ligne, la première colonne est pré-remplie (par $x \in]6, 15[$), sur la deuxième ligne c'est la case de la deuxième colonne (avec $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$). Sur la troisième ligne, c'est la colonne « croquis » qui est pré-remplie. Les colonnes « valeur absolue » et « distance » sont pré-remplies sur les lignes 4 à 7 et sur la dernière ligne un croquis est donné.

Les cases pre-remplies fournissent donc des indices pour remplir la totalité du tableau et, sur chaque ligne, une colonne est remplie de manière à avoir au moins une case par colonne, sur l'ensemble du tableau :

ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$				
	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$			
				
				$d(x; \frac{3}{2}) = 1$
			$\lvert x + 5 \rvert = \pi$	
				$d(x; -4) \leq 5$
			$\lvert x - 3 \rvert \leq \frac{1}{2}$	
				

Pour construire cet exercice nous avons choisi de ne pas pré-remplir une ligne complète pour que le remplissage ne se fasse pas par mimétisme, de ne pas mettre que des nombres entiers et des intervalles centrés en 0. Nous avons aussi fait appel à des ensembles réduits à deux éléments mais aussi à des réunions disjointes d'intervalles, en ce qui concerne les ensembles de solutions. Et enfin nous avons fait intervenir des inégalités larges et strictes.

Nous faisons l'hypothèse que les croquis sur lesquels sont aussi représentées des données opératoires (point milieu, demi-longueur de l'intervalle) favorisent la mise en relation entre les deux colonnes de gauche et les deux colonnes de droite. C'est pourquoi nous les avons positionnés dans la colonne centrale.

Le test a été proposé en L2 mathématiques à Strasbourg en deux versions : une avec et une sans représentation graphique (respectivement 10 et 9 tests), et cela pour avoir des indicateurs sur l'impact de la présence des croquis sur les réponses.

Nous pouvons remarquer que, sur une ligne donnée, le remplissage, de la colonne 1 à partir de la colonne 2 et réciproquement met en jeu une simple ré-écriture des informations. Cette remarque est également valable pour remplir la colonne 4 à partir de la 5 et réciproquement. Si l'étudiant connaît l'équivalence entre l'appartenance à une partie de $\mathbb{R}$, et la notion d'encadrement alors il saura remplir les deux premières colonnes et si il connaît le lien entre valeur absolue et distance, de même il saura partir des informations de la colonne 4 pour remplir la colonne 5 et réciproquement. On peut s'attendre à retrouver l'erreur classique $d(x, a) = |x + a|$.

Une case pré-remplie sur la colonne « croquis », en position médiane, devrait permettre de remplir les colonnes de droite, comme de gauche, puisque des informations nécessaires y sont représentées. Il s'agit pour l'étudiant de détecter les informations sur le croquis.
Inversement pour remplir cette colonne « croquis », le travail n'est pas le même selon le pré-remplissage donné : si c'est à partir des informations contenues dans les colonnes de droite c'est juste traduire ces informations en terme de croquis, en revanche si c'est à partir des informations contenues dans les colonnes à gauche, cela nécessite de trouver le point milieu de l'intervalle et sa demi-longueur. Transférer l'information de gauche à droite, dans le tableau, nécessite donc un changement de registre plus élaboré qu'une simple ré-écriture, pour lequel le passage par la représentation graphique peut donner des pistes. Nous nous attendons à relever des erreurs entre les inégalités larges et strictes, et nous sommes conscients que l'égalité peut être déroutante.

2.B. Analyse *a posteriori*

Avant d'étudier l'influence de l'utilisation des graphiques, nous avons étudié les 9 copies de Strasbourg (L2) où le tableau était donné sans la colonne « croquis ». Cette étude nous conforte dans l'idée qu'elle pourrait être utile à certains étudiants. Dans les copies ci-dessous (figure 4 et figure 5) les deux colonnes 1 et 2 d'une part et les colonnes 3 et 4 d'autre part, sont clairement remplies sans mise en relation entre celles de droite et celles de gauche.

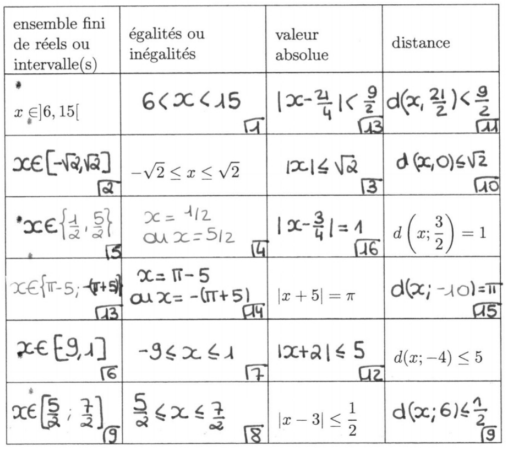


FIGURE 4 – Souvenir « qu'il faut prendre 1/2 » (L2-Strasbourg)

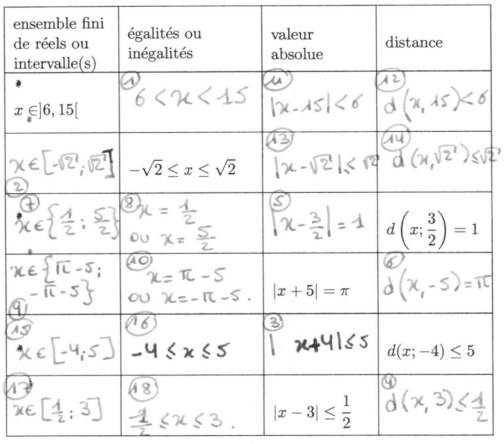


FIGURE 5 – Un exemple où le lien n'est pas fait en abscence de croquis (L2-Strasbourg)

Sur le brouillon d'une de ces 9 copies sans colonne « croquis » on constate le recours au schéma pour traiter le cas d'égalité (figure 6).

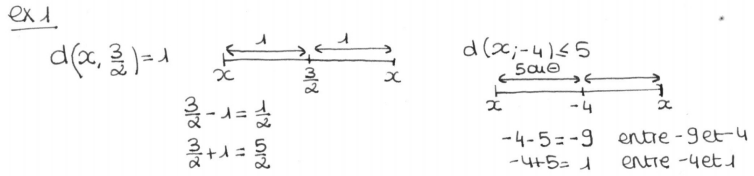


FIGURE 6 – Schéma fait au brouillon pour un test sans croquis (L2-Strasbourg)

L'analyse des 36 copies (11 de Bordeaux, 7 de Limoges, 8 de Poitiers et 10 de Strasbourg) sur la version du test comportant une colonne « croquis » a été conduite de la façon suivante. Après analyse des deux premières colonnes et pour les copies où les réponses sur ces colonnes sont correctes, nous avons étudié des points de vigilance et nous nous sommes posés les questions suivantes.

— Le traitement de la colonne avec « croquis » : est-il correct ? erroné ? Quel type d'erreurs repère-t-on ?
— L'utilisation du croquis : en cas de réussite des croquis, les colonnes 4 et 5 sont-elles traitées correctement ?
— Le lien éventuel entre la réussite des colonnes de droite et la qualité du croquis : le croquis est-il détaillé ? contient-il des informations superflues ?
— Le cas d'égalité est regardé à part.

En accord avec l'analyse *a priori*, on note une cohérence des réponses entre les colonnes 1 et 2 : il s'agit d'une simple réécriture, capacité mobilisable dans le registre algébrique. La réécriture entre les colonnes 4 et 5 fonctionne également correctement. Toutefois, on retrouve l'erreur classique, signalée dans l'analyse *a priori* , $d(x, a) = |x + a|$. Pour ceux qui ne savent pas passer de la distance à la valeur absolue, le schéma n'est d'aucun secours.

Sur certaines copies correctement remplies, le schéma est fait en dernier. Dans ce cas, le schéma ne semble pas nécessaire à l'étudiant. La colonne « croquis », qui correspond à une partie opérationnelle de l'activité, permet aux étudiants de construire et de représenter le milieu, mais cette compétence peut-être mobilisable sans cette colonne. Par ailleurs, les étudiants qui réussissent le mieux font les tracés les plus approximatifs (certains ne dessinent même pas l'axe) et mettent uniquement les données nécessaires, voir la figure 7. On notera qu'il manque le d de distance dans la dernière colonne.

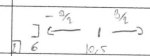
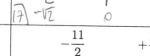
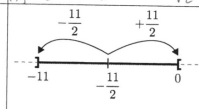
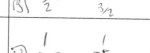
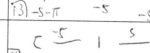
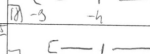
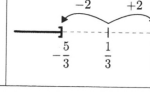
ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$	$6 < x < 15$		$\lvert x-10{,}5\rvert < \frac{9}{2}$	$(x, 10{,}5) < \frac{9}{2}$
$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$		$\lvert x\rvert \leqslant \sqrt{2}$	$(x; 0) \leqslant \sqrt{2}$
$x \in]-11, 0[$	$-11 < x < 0$		$\lvert x + \frac{11}{2}\rvert < \frac{11}{2}$	$(x, -\frac{11}{2}) < \frac{11}{2}$
$x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\}$	$x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$		$\lvert x - \frac{3}{2}\rvert = 1$	$d\left(x; \frac{3}{2}\right) = 1$
$x \in \{-5, -5+\pi, -5-\pi\}$	$x = -5 - \pi$ ou $x = -5 + \pi$		$\lvert x + 5\rvert = \pi$	$(x, -5) = \pi$
$x \in [-3, 1]$	$-3 \leqslant x \leqslant 1$		$\lvert x+1\rvert \leqslant 4$	$d(x; -4) \leq 5$
$x \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$	$\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$		$\lvert x - 3\rvert \leq \frac{1}{2}$	$(x; 3) \leqslant \frac{1}{2}$
$x \in \mathbb{R} \setminus]-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}[$	$x \leqslant -\frac{5}{3}$ ou $x \geqslant \frac{7}{3}$		$\lvert x - \frac{1}{3}\rvert \geqslant 2$	$(x, \frac{1}{3}) \geqslant 2$

FIGURE 7 – Exemple avec uniquement les données nécessaires (L2-Strasbourg)

Nous remarquons des confusions entre inégalités larges et strictes et la difficulté pour certains étudiants de représenter un ensemble à deux éléments.

En terme de réussite nous proposons une analyse plus détaillée qui partitionne le tableau en zones de réussite des étudiants comme le montre la figure 8.

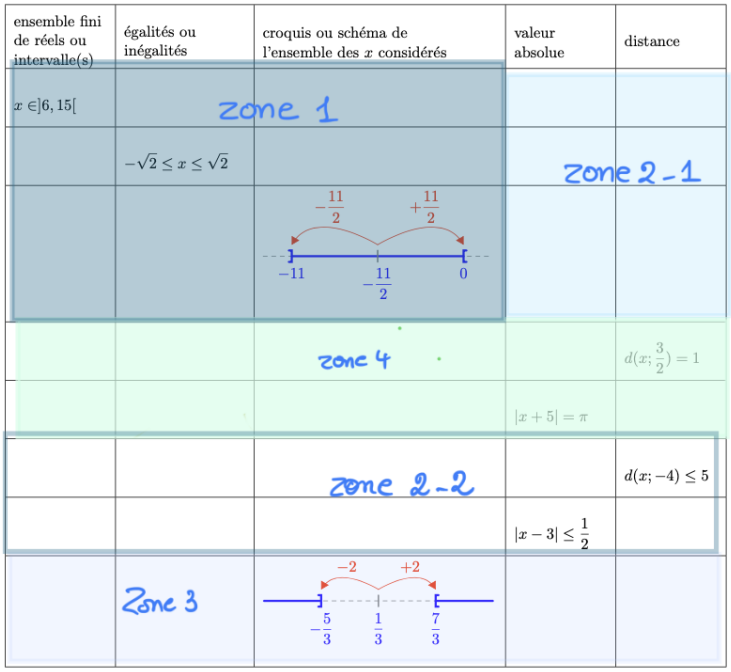


FIGURE 8 – Zones de réussite

— La zone 1 : les étudiants n'ont, en général, pas de difficultés à la remplir (seulement pour 2 copies sur les 36). L'écriture de l'appartenance à un intervalle est bien comprise et correctement utilisée. Pour remplir la colonne centrale, celle du schéma, il s'agit de trouver le milieu de l'intervalle donné. Une fois cette information connue, les deux colonnes de droites sont faciles à remplir si les notions de valeur absolue et de distance sont connues. Cette partie est la zone 2-1.

— Les zones 2-1 et 2-2 : elles ne sont pas toujours remplies en raison de la méconnaissance du lien entre valeur absolue et distance (dans 10 copies sur 36 toutes les cases de ces zones ne sont pas remplies). Sur ces lignes 6 et 7, le milieu de l'intervalle est donné et les bornes de l'intervalle sont données en terme de distance relativement au milieu. Le schéma en est une simple traduction. Lorsque le schéma est fait, les colonnes 1 et 2 sont remplies, sinon, non. À partir de la distance ou de la valeur absolue (colonnes 4 et 5), les étudiants arrivent à remplir les colonnes 1 et 2. La colonne de la valeur absolue n'est pas toujours remplie, lorsque la distance est donnée (figure 9).

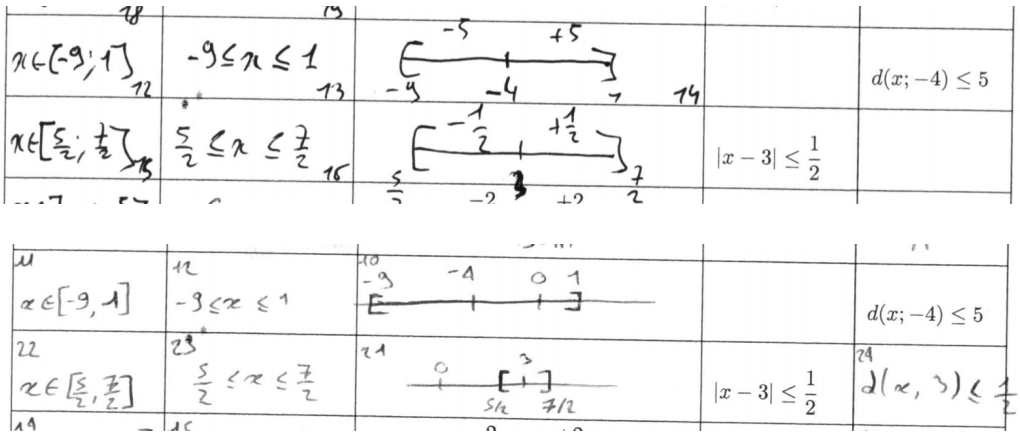


FIGURE 9 – Zoom zone 2-2 : deux productions (L2-Strasbourg)

— Zone 3 : la dernière ligne est rarement complète en particulier sur les colonnes 4 et 5 (valeur absolue/ distance) en L2 surtout (4 sur les 10 de L2 Strasbourg remplissent correctement et 20 sur les 26 copies de L3 et Master1) : les étudiants arrivent à traduire le dessin en terme d'appartenance à une union d'intervalles ou à l'écrire avec des inégalités mais, sur les copies montrant le plus de fragilité, ni la colonne 4 ni la colonne 5 ne sont remplies (figure 10).

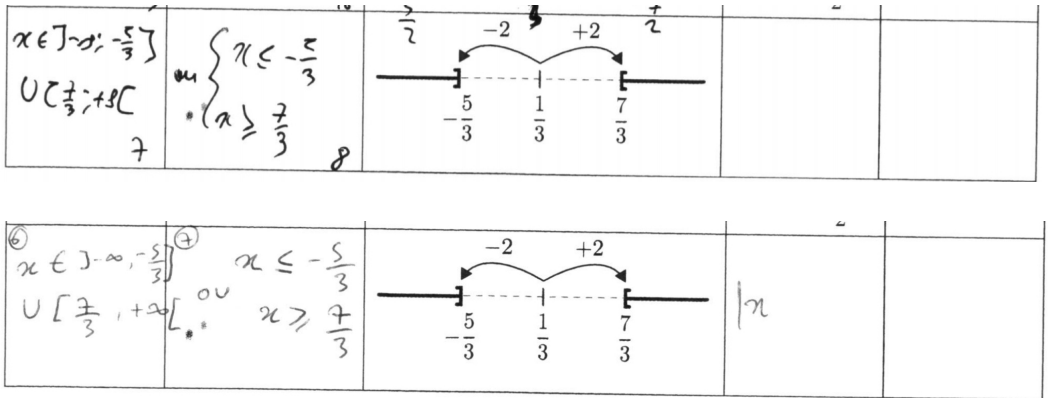


FIGURE 10 – Zoom zone 3 : deux productions (L2-Strasbourg)

— Zone 4 : ce sont les lignes des cas d'égalité et ce sont les moins bien traitées (réussites : 4 sur 10 copies de L2, 13 sur 18 copies en L3 et 2 sur 8 copies de Master). Le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de solutions (2 solutions) déroute les étudiants. Lorsqu'il y a des réponses avec erreurs, les étudiants arrivent à remplir les colonnes 1 et 2 mais le schéma n'est pas correct. On peut faire l'hypothèse que pour le cas d'égalité, on utilise peu la représentation ensembliste (colonne 1) dans le secondaire. Le cas d'égalité est un indicateur de la compréhension de la notion de distance sur la droite réelle.

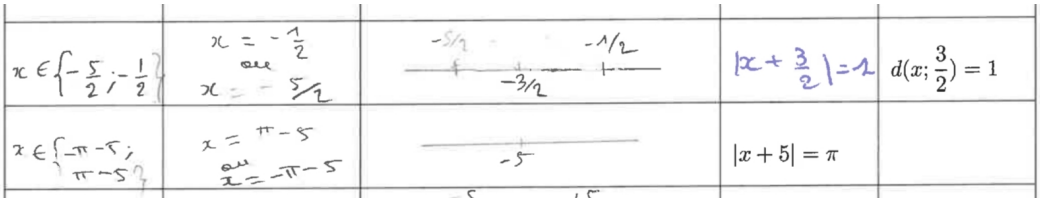


FIGURE 11 – Zoom zone 4 : une production (M1-Poitiers)

2.C. Conclusion pour l'exercice 1

L'ensemble du tableau est rarement correctement rempli. Les lignes des cas d'égalité sont les moins bien traitées (zone 4) puis viennent les zones 2-1, 2-2 et 3 en raison de la méconnaissance du lien entre valeur absolue et distance. Nous pouvons faire l'hypothèse que les pratiques majoritaires en calcul ne proposent pas assez souvent l'utilisation de la valeur absolue. On peut imaginer, à la sortie du lycée une prise en charge en L1 d'un travail sur les différents registres mettant en jeu les notions de valeur absolue, distance sur la droite réelle, ensemble de valeurs et intervalle, pour améliorer la capacité des étudiants à utiliser les changements de registres nécessaires et rendre ces notions opérationnelles. Dans les exercices portant sur la résolution d'inéquations, il s'agit de ne pas se contenter d'une résolution algébrique : écrire l'ensemble des solutions en utilisant des accolades, ou encore une représentation sur la droite des réels doit être clairement demandée.

Nous pouvons imaginer d'autres exercices en dimension 2 qui sont parfois plus faciles à appréhender, comme des représentations de zones du plan définies à partir de valeurs absolues ou de distances.

3. Preuve graphique d'une proposition algébrique implicative

3.A. Présentation de l'exercice 2 et analyse *a priori*

Il s'agit ici de démontrer, en utilisant une preuve graphique l'implication suivante : pour tout réel $a > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$((|x| \leq |x+a|) \text{ ET } (|x| \leq |x-a|)) \Longrightarrow |x| \leq \frac{a}{2}.$$

Nous avons d'abord testé la production graphique de cette implication lors d'un atelier à destination des enseignants du secondaire. À l'issue de cet atelier nous avons choisi de proposer en amont l'exercice de remplissage du tableau précédent, afin de mettre en place le lien entre distance et valeur absolue.

La preuve graphique est acceptable à condition de préciser les intersections de droites à prendre en compte et les régionnements du plan déterminés par les inégalités. Des preuves graphiques sont donc possibles en faisant un croquis et en notant clairement les points d'intersection et en complétant par des calculs explicatifs :

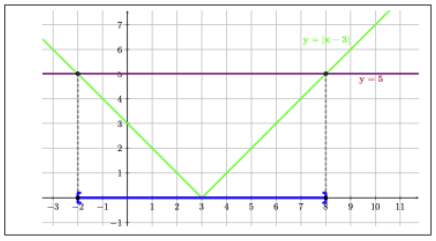
a) en terme de distance l'hypothèse devient $d(0,x) \leq d(x,-a)$ et $d(0,x) \leq d(x,a)$ et la représentation sur la droite de réels de cette situation, peut amener à représenter $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et à conclure,
b) à l'aide des représentions graphiques des fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |x+a|$ et $x \mapsto |x-a|$.

Des preuves algébriques sont également possibles :

a) avec une disjonction de cas,
b) en considérant les inégalités équivalentes avec les carrés (tous les termes sont positifs) et en utilisant que $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ équivaut à $|x| \leq \frac{a}{2}$.

Suite à une première expérimentation, nous avons constaté des tentatives de réponses à l'aide des représentations graphiques des trois fonctions, mais ces représentations étaient portées sur des schémas différents, ce qui empêchait les comparaisons graphiques. Nous avons alors rajouté les deux graphiques suivants (figure 12). Comme le suggère cette adaptation, le « ET » logique de la proposition donnée n'était pas complètement pris en compte par les étudiants, sans cet ajout.

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x-3| \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$



$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

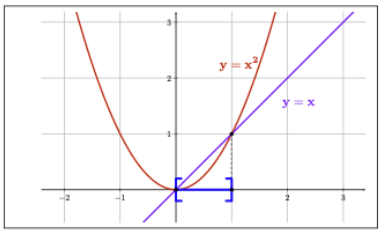


FIGURE 12 – Graphiques ajoutés

Par ailleurs, ces deux graphiques suggèrent le passage d'une proposition à une inconnue qui peut se résoudre dans $\mathbb{R}$ dans le registre algébrique, à une représentation dans le plan muni d'un repère, en utilisant un graphique dans le registre fonctionnel. Ce changement de registre est accompagné par la donnée des exemples précédents. Nous pouvons faire l'hypothèse que les étudiants utiliseront plutôt une représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$, plutôt que sur la droite réelle en se référant à l'exercice du tableau.

La déduction des tracés de courbes représentatives des fonction $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(x-a)$ à partir de celle d'une fonction f (ici $f(x) = |x|$) semble peu présente dans les pratiques du lycée et peut également être un obstacle dans la mise en oeuvre de la démonstration graphique.

Que ce soit dans le registre graphique ou algébrique, on peut s'attendre à ce que la présence du paramètre a soit un obstacle à la mise en place d'un raisonnement. Nous avions aussi pour but de voir comment cet obstacle est contourné, par le choix, par exemple, de valeurs particulières de a pour s'approprier la question.

3.B. Analyse *a posteriori*

Parmi les 45 copies (11 de Bordeaux, 7 de Limoges, 8 de Poitiers et 19 de Strasbourg) que nous avons analysé 23 ont débuté une réflexion sur cet exercice : 8 sur les 20 copies de L2, 13 sur les 18 copies de L3 et 2 sur les 8 copies de Master. Parmi les étudiants ayant réussi le remplissage du tableau du premier exercice du test, on peut repérer des productions de dessins intéressantes au sujet de l'utilisation du paramètre a mais aussi des échecs. Certains essaient de revenir à la définition de la valeur absolue, mais la propriété $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ n'est pas souvent utilisée (3 fois correctement) et beaucoup d'étudiants n'utilisent pas le dessin de la droite réelle comme support de raisonnement.

Par ailleurs ci-dessous, deux illustrations avec un brouillon où l'on peut voir un essai de valeur numérique pour a puis le dessin attendu (figure 13) et un autre brouillon où plusieurs valeurs numériques sont prises pour a, sans succès (figure 14).

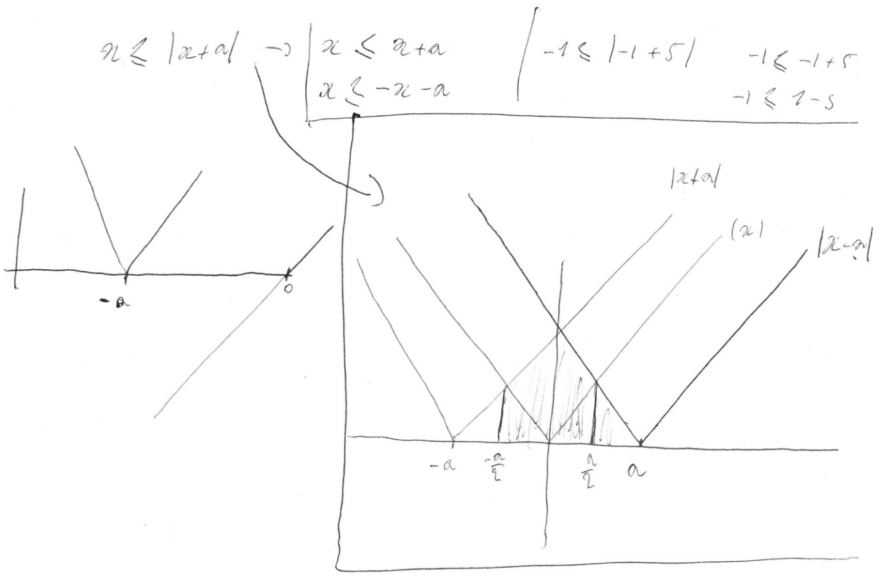


FIGURE 13 – Un exemple de réussite (L2-Strasbourg)

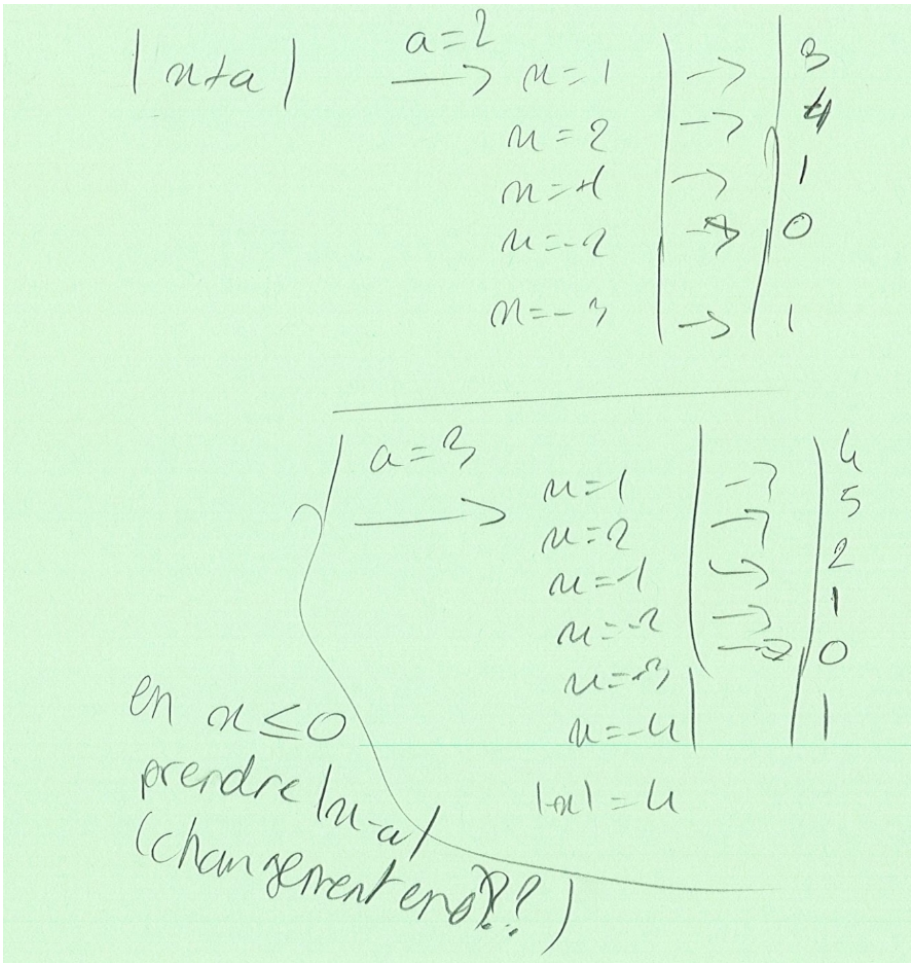


FIGURE 14 – Un exemple d'échec après plusieurs valeurs numériques pour a (L3-Bordeaux)

La déduction des tracés de courbes représentatives des fonctions $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(x-a)$ à partir de celle de f n'est clairement pas une compétence mobilisable par tous. La figure 14) illustre la difficulté à faire les tracés après plusieurs essais numériques. On peut noter que parmi les 13 copies étudiants de L3, les trois courbes sont représentées sur 9 d'entre elles et sont accompagnées d'une légende correcte mais sans apport significatif pour la résolution. Pour les copies de L2, 1/5 des copies sont de ce type également. Lorsque le graphique proposé est juste, il est rarement accompagné d'une explication satisfaisante (4 copies sur les 23 ayant débuté une réflexion).

Ci dessous deux exemples de réussite :

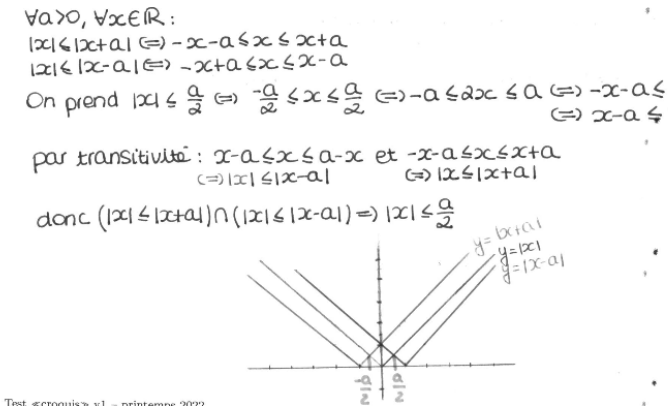


FIGURE 15 – L2-Strasbourg

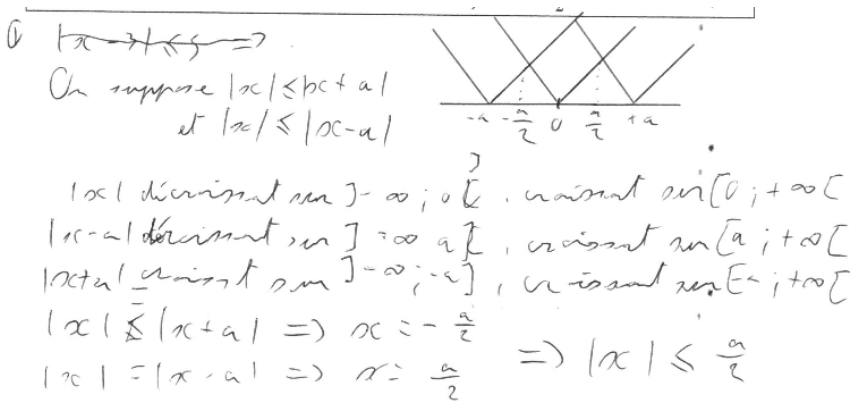


FIGURE 16 – L2-Strasbourg

Dans ces deux productions (figures 15 et 16), les tracés des trois courbes dans leurs positions respectives sont corrects et l'utilisation du paramètre ne semble pas être un obstacle. En revanche, le graphique n'est pas clairement utilisé comme support des écritures algébriques qui les accompagnent. En effet, pour que le graphique illustre le résultat à démontrer, il faut identifier les parties du plan correspondant aux deux inégalités de la prémisse et leur conjonction avec le connecteur ET. Cela ne semble pas disponible chez ces étudiants. On peut faire l'hypothèse qu'il y a une double difficulté pour eux : d'une part, lire ces inégalités dans le registre graphique et, d'autre part, les traduire dans le registre algébrique par une disjonction des cas sur la position de la variable x par rapport à $-a$, 0 et a.

On peut noter, dans les rédactions proposées, des confusions entre la fonction et son expression et des implications erronées. Pour le travail algébrique, les inégalités équivalentes au carré sont présentes dans 2 copies, l'une avec une démonstration non aboutie et l'autre réussie (figure 17).

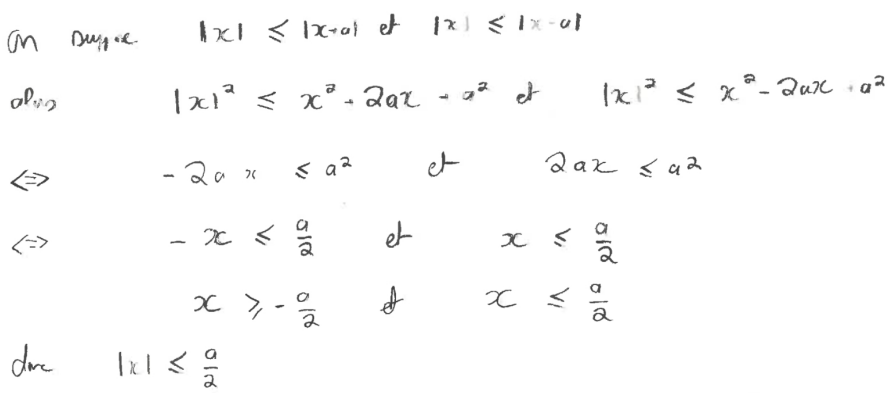


FIGURE 17 – Résolution algébrique (M1-Poitiers)

Nous avons repéré une seule fois l'écriture de $|x| = \sqrt{x^2}$, mais sans aucune utilisation probante. Il Les exemples de lectures graphiques d'inégalités que nous avons ajoutés dans l'exercice (figure 12), ne sont pas accompagnés de la procédure de lecture graphique, comme nous pourrions la réaliser devant des étudiants et l'information apportée est d'autant réduite.

3.C. Suggestions d'évolution de l'exercice 2

Si l'on veut suggérer aux étudiants de construire ou lire un graphique sur la droite réelle, on pourrait tenter de renforcer le lien entre les deux premiers exercices du test, et mettre dans le tableau du premier exercice une ligne avec comme ensemble proposé une demi-droite, pour illustrer l'équivalence (sous l'hypothèse $a \leq b$) :

$$(x \in]-\infty, \frac{a+b}{2}]) \Leftrightarrow (x \leq \frac{a+b}{2}) \Leftrightarrow (|x-a| \leq |x-b|) \Leftrightarrow d(x;a) \leq d(x;b)\,.$$

On peut aussi ajouter un exercice entre les deux exercices du test dans lequel il serait explicitement demandé de résoudre de deux façons différentes l'inégalité $|x-a| \leq |x-b|$. La traduction de l'inégalité serait alors demandée en terme d'inégalité de distances puis représentation sur la droite réelle ; ainsi qu'en terme d'inégalités entre fonctions et représentation dans le plan avec la position relative des courbes représentatives. Voici un exemple possible :

On cherche à déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation

$$|x+3| \leq |x-5|.$$

a) Pour cela on introduit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+3|$ et $g(x) = |x-5|$. Donner dans un même repère les courbes représentatives des deux fonctions et déterminer graphiquement l'ensemble solution en indiquant des tracés utiles pour la résolution.
b) On note $d(a,b)$ la distance entre les réels a et b, déterminer les « ? » pour que

$$|x+3| \leq |x-5| \Leftrightarrow d(x,?) \leq d(x,?).$$

Proposer une résolution graphique en travaillant maintenant uniquement sur la droite réelle.

Nous pourrions également rajouter un exercice de lecture graphique : en donnant un graphique comme dans la figure 12, sans les équivalences écrites sur la gauche, mais en demandant aux étudiants quelles informations ils peuvent tirer d'un tel graphique.

3.D. Conclusion pour l'exercice 2

L'énoncé de cet exercice comporte plusieurs éléments à prendre en compte, ceux se situant dans le registre logique (implication avec prémisse composée) et les autres dans le registre algébrique (inégalités avec valeurs absolues et paramètre). La consigne étant de donner une preuve graphique de la proposition, il est donc nécessaire par contrat de changer de registre de représentation, en se plaçant au choix dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou sur la droite réelle. Les exemples donnés dans la deuxième version du test incitent à choisir le registre $\mathbb{R}^2$. Cependant, l'énoncé est écrit avec une seule variable réelle x et aucune fonction n'est suggérée, de plus, les étudiants avaient résolu l'exercice 1 concernant des variables réelles.
Notre objectif est double :

- vérifier la capacité des étudiants à traduire l'énoncé dans un registre graphique et à décrire les éléments sur le croquis pour en faire une preuve (par exemple, les coordonnées des points d'intersection des courbes),
- montrer aux étudiants comment le registre graphique permet de voir facilement et de comprendre le résultat à démontrer.

Notre deuxième objectif n'a pas vraiment été atteint, car ce problème a révélé des difficultés assez générales en Licence qui se situent en deçà de la question posée :

- difficulté à tracer la fonction valeur absolue quand il y a un paramètre (erreur de position de la courbe par rapport aux axes),
- difficulté à construire sur un même graphique plusieurs courbes,
- difficulté de lecture et d'interprétation des inégalités en positions relatives de deux courbes.

Même les deux graphiques rajoutés en exemple dans la deuxième version n'ont pas suffi ! Rappelons que l'exercice précédent (exercice 1, cf. § 2), a attesté de la difficulté d'un tiers de ces étudiants à traduire, sur la droite réelle, la distance entre deux points en valeur absolue (et inversement). Il semble que même ceux qui ont réussi cette partie de l'exercice n'ont pas réinvesti cette transcription dans l'exercice 2. Est-ce que, pour eux, tracer la droite réelle n'est pas une représentation graphique ?
Ces résultats expérimentaux révèlent qu'il est nécessaire de prendre en charge dans les enseignements de licence les activités de tracés à la main de courbes dans $\mathbb{R}^2$, de lecture et écriture de données sur la droite réelle, et plus généralement des exercices mettant en relation les registres algébrique, analytique, graphique et géométrique. Les résultats de nos expérimentations montrent que ces deux exercices sont tout-à-fait pertinents, à la fois pour construire ces savoir-faire et pour les évaluer.

4. Différents registres pour les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité dans le cadre de l'analyse

4.A. Présentation des exercices 3, 4 et 5 et analyse *a priori*

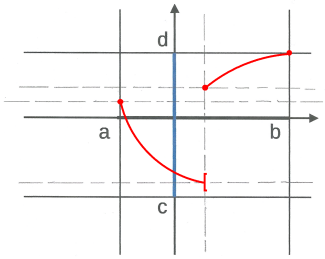
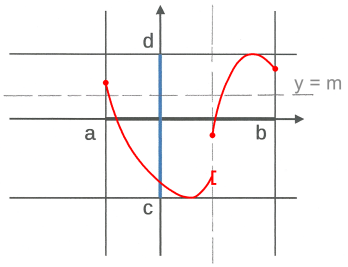
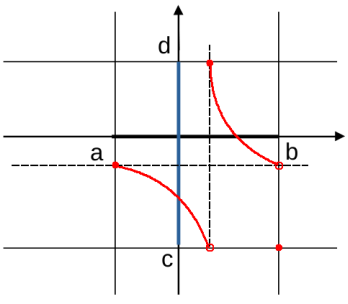
Les exercices 3, 4 et 5 ont pour objectif de tester l'aptitude des étudiants à changer de registre dans le cadre de l'analyse, sur des notions nouvelles pour des étudiants de L1 [8], que sont l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application.

Les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité sont très importantes dès le début de l'université, en particulier en algèbre linéaire pour étudier les applications linéaires. L'étude des transformations géométriques en tant que telles ayant disparue au lycée, nous avons fait le choix de travailler dans le cadre de l'analyse, plus familier des élèves, dans lequel ils ont déjà rencontré la notion de bijection (théorème de la bijection). En particulier, nous avons fait le choix dans ce test de ne pas travailler avec les « patates » représentant des ensembles finis. C'est une représentation usuelle et qui est pourtant souvent utilisée lors de l'introduction de la définition des notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité. Dans le cadre de l'analyse, l'illustration de ces notions est assez différente mais il est fondamental que les étudiants les comprennent pourtant aussi dans ce cadre. Par ailleurs nous sommes conscients

8. Première année universitaire

des difficultés liées à la notion de fonction en particulier les confusions entre ensemble de départ et d'arrivée. En ce qui concerne le langage mathématique, la difficulté que peut poser les symboles $\exists$ et $\forall$ à un étudiant de ce niveau, peut aussi tout à fait être un obstacle pour qu'il s'exprime clairement dans le registre formel.

En introduction de ces exercices, nous nous sommes inspirés d'un tableau de Rogalski (Rogalski, 2001) afin d'illustrer ce que nous appelons registres (Nom de la propriété, Langage formalisé, Langage usuel, Équation, Exemple de représentation graphique). Pour les exemples de représentations graphiques nous avons représenté des fonctions discontinues afin de dissocier les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité de celle de continuité.

Nom de la propriété	Langage formalisé	Langage usuel	Equation	Exemple de représentation graphique
f est **injective** de E dans F	$\forall x, x' \in E$ si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$	Tout élément m de F a *au plus* un antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a *au plus* une solution dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en *au plus* un point.  avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$
f est **surjective** de E dans F	$\forall m \in F$ $\exists x \in E$ tel que $f(x) = m$	Tout élément m de F a *au moins* un antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a *au moins* une solution dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en *au moins* un point.  avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$
f est **bijective** de E dans F	$\forall m \in F$ $\exists x \in E$ *unique* tel que $f(x) = m$	Tout élément m de F a *un et un seul* antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a *une* solution *et une seule* dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en *un* point *et un seul.*  avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$

Dans l'exercice 3, une même fonction (la fonction carré) est proposée et ne sont modifiés que les ensembles de départ et d'arrivée. Dans chaque cas, il est demandé si les applications sont ou non injective/surjective/bijective en argumentant dans deux registres dont l'un graphique. Le choix a été

fait de garder une même fonction bien connue et quatre questions afin qu'une meilleure attention soit portée aux ensembles de départ et d'arrivée.

Pour l'exercice 3, nous avons fait l'hypothèse que le travail à faire le serait d'abord dans le registre graphique avec le tracé des représentations graphiques et une matérialisation des ensembles de départ et d'arrivée.

Nous avons souhaité voir, en plus de l'illustration graphique, quelle définition ou propriété caractéristique sont privilégiées pour les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité. Une étude du vocabulaire utilisé est sans doute à mener. Ce n'est pas ici notre propos, mais nous sommes conscients que le vocabulaire et son utilisation ont un impact important sur la compréhension de ces notions ce qui rejaillit certainement sur les représentations graphiques demandées. De même nous ne nous sommes pas concentrés sur les aspects logiques des justifications données.

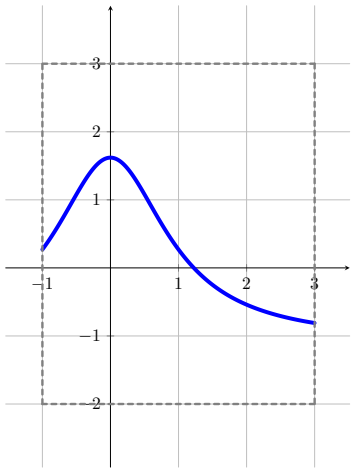
Dans l'exercice 4, deux représentations graphiques de fonctions ont été proposées avec la matérialisation des ensembles de départ et d'arrivée, en plus de leur mention dans l'énoncé. L'expression analytique des fonctions n'est pas donnée afin d'inciter les étudiants à travailler dans le registre graphique. Le travail donné dans l'encadré ci-dessous consiste à justifier graphiquement si les fonctions sont ou ne sont pas injectives ou surjectives.

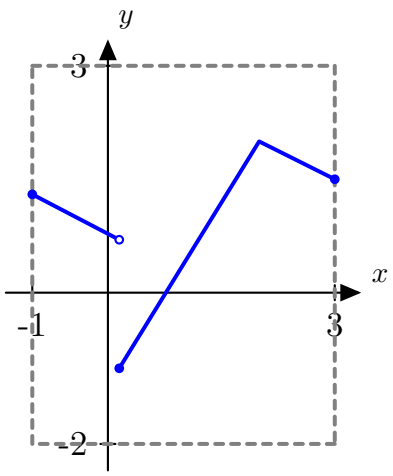
On a représenté ci-dessous deux fonctions de $E = [-1, 3]$ dans $F = [-2, 3]$. Pour chacune d'elle indiquez si elle est

— injective ?

— surjective ?

Justifiez graphiquement vos réponses.





Pour les exercices 3 et 4, nous pensons que l'étude graphique de l'injectivité et de la surjectivité sera faite à l'aide du tracé d'une droite générique d'équation $y = m$ et de la matérialisation de son intersection (ou pas) avec la courbe représentative de la fonction. Nous attendons que, de plus, les étudiants fassent apparaitre les abscisses des points d'intersection dans le cas non injectif ; qu'ils fassent apparaitre la non-intersection dans le cas non surjectif. En effet, la présence des abscisses sur le schéma est un marqueur du changement de registre, à la différence de deux solutions faites en parallèle.

Dans l'exercice 4, nous pensons que l'absence d'expression analytique, même si elle complique un peu le travail, permet de mettre en évidence la compréhension ou non de la traduction graphique. On peut remarquer que pour répondre correctement à cet exercice il suffit dans chaque cas de donner un contre-exemple. La visualisation graphique d'un contre-exemple est sans doute plus aisée que la visualisation du cas générique. Nous émettons l'hypothèse que la non-surjectivité sera facilement matérialisée par une droite horizontale bien choisie qui ne coupe pas le graphe de la fonction.

L'exercice 5 est un exercice qui demande de la créativité. Il est demandé de représenter une fonction qui est injective et non surjective, surjective et non injective, bijective, avec à chaque fois, les mêmes

ensembles de départ et d'arrivée qui sont des intervalles. Le terme de fonction est utilisé ici dans le cadre de l'analyse et nous pensons qu'il sera compris dans le sens usuel d'application.

Une première version du test (copies de Bordeaux et Limoges) demandait des exemples de fonctions affines par morceaux, il y avait eu peu de réussite. Cette consigne a été supprimée dans la version actuelle du test, laissant ainsi la possibilité d'adapter aux bons intervalles les exemples des énoncés. Les étudiants n'ont pas utilisé cette possibilité.

En plus de demander de la créativité, cet exercice demande aussi de contrôler deux notions en même temps (existence et unicité), nous avons conscience qu'il est plus difficile que les exercices 3 et 4.

4.B. Analyse *a posteriori*

Rappelons que les analyses portent sur 45 copies (19 copies de L2 Strasbourg, 11 copies de L3 Bordeaux, 7 copies de L3 Limoges et 8 copies de M1 Poitiers).

Parmi les 45 étudiants, 3 n'abordent aucun des trois exercices. Dans les 34 copies où l'exercice 4 est traité, l'exercice 3 l'est aussi. Dans les 29 copies où l'exercice 5 est traité, l'exercice 4 l'est aussi systématiquement.

L'exercice 3 a bien été traité dans le registre graphique, qui était explicitement demandé. Cependant 3 copies sur 42 ne comporte aucun graphique et 2 copies sur 42 comportent uniquement des graphiques faits au brouillon. Ces derniers contenaient des informations et nous les avons donc prises en compte.

La matérialisation des ensembles de départ et d'arrivée est faite (33 copies sur 39) et ce le plus souvent via la limitation des axes à des demi-droites lorsque l'un des ensembles est $\mathbb{R}_+$ (figure 18). On trouve quelques cas de coloration de la zone du plan correspondant. On trouve aussi une matérialisation partielle avec le tracé d'une demi parabole lorsque l'ensemble de départ $E = \mathbb{R}_+$, qui ne permet pas de matérialiser les différents cas pour l'ensemble d'arrivée.

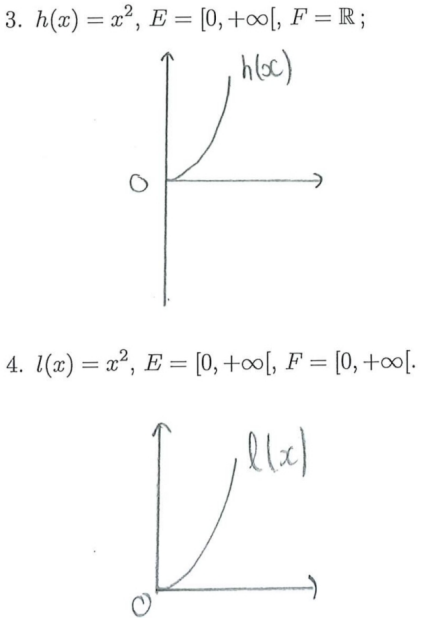


FIGURE 18 – Visualisation via les axes de E et F (L3-Limoges)

Dans les 39 copies où il y a des graphiques, on note l'absence totale de tracé de droite horizontale (qu'elle soit particularisée ou bien générique $y = m$) pour 6 d'entre-elles. On peut alors qualifier la représentation graphique qui a été faite de dessin et non de croquis puisqu'elle n'est pas un support visuel à l'argumentaire. De plus, le tracé d'une droite générique n'est présent que comme support à l'étude de l'injectivité dans 7 des 33 copies. La droite illustre essentiellement dans les copies la non injectivité (on exhibe une droite horizontale qui coupe 2 fois le graphe) et non surjectivité (on exhibe une droite horizontale qui ne coupe pas le graphe). Il semble qu'il y a chez les étudiants une confusion entre droite particulière à titre de contre exemple et droite générique ($y = m$) qui sert aussi bien de contre exemple "générique" et de support pour justifier l'injectivité ou la surjectivité.

L'exercice 4 est abordé dans 34 copies. Une droite (particulière ou générique d'équation $y = m$) est tracée sur 30 des 34 copies. On peut supposer qu'il y a une vision générique des croquis (la droite est déplacée verticalement jusqu'à une position permettant de justifier la réponse).

Lorsqu'il y a intersection de cette droite avec la représentation graphique de la fonction étudiée, la matérialisation ou non des abscisses des points d'intersection est faite de façon analogue dans les exercices 3 et 4. Cette matérialisation est présente dans la moitié des copies pour lesquelles nous avons une droite horizontale (16 copies sur 33).

Pour ces deux exercices 3 et 4, bien que tout ne soit pas totalement complété, les étudiants donnent très souvent des bonnes réponses concernant la nature des fonctions même si quelques justifications, notamment dans le registre formel (figure 19), sont difficilement acceptables à ce niveau d'études (en L3 notamment).

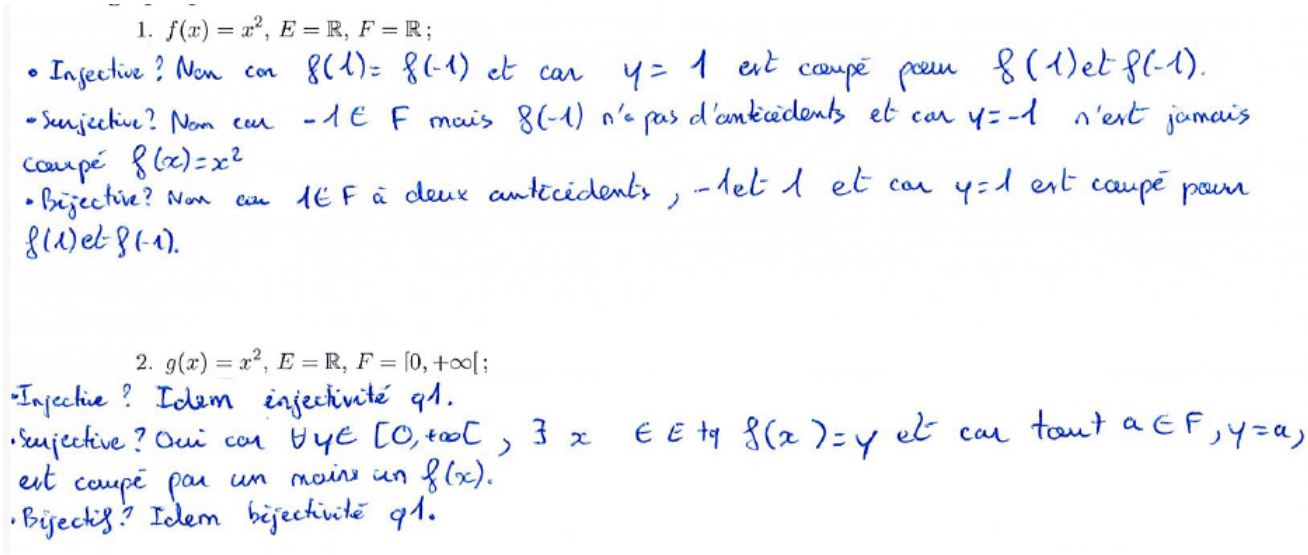


FIGURE 19 – Résolution correcte avec un vocabulaire non adapté (L3-Bordeaux)

Pour l'exercice 3, nous avons 3 copies sur 42 où il y a la fois des erreurs concernant l'injectivité et la surjectivité, 7 copies sur 42 où il y a des erreurs uniquement sur la surjectivité (dans ce cas le fait que tout point ait une image est confondu avec la notion de surjectivité). On trouve seulement 2 copies sur 34 erreurs concernant la non-injectivité pour l'exercice 4 et 10 copies sur 34 concernant la non-surjectivité (surtout en L2, 6 copies sur 13 et en M1, 3 copies sur 8).

Les erreurs sur la notion de surjection semble révéler des lacunes sur la notion de fonction : confusion entre existence et unicité de l'image. Nous savons que de façon générale la différence entre existence (« au moins un ») et unicité (« un et un seul ») est une difficulté.

On retrouve dans l'exercice 5 que la notion de surjectivité est plus difficile à comprendre que celle d'injectivité, avec des confusions entre existence d'une image (trou dans le graphe), unicité de l'image (condition nécessaire de la relation fonctionnelle) et surjectivité proprement dite.

Dans cet exercice, les trois items ne sont pas tous traités. Il y a échec pour les 3 items dans une copie de L3 et une copie de M1. Nous supposons que la cause en est la prise en compte unique de l'ensemble des images. Dans la copie de L3, on a ainsi à deux reprises des trous dans l'ensemble de départ et le cas d'une représentation qui n'est pas celle d'une fonction (un point avec une infinité d'images). Dans la copie de M1, c'est une non réponse dans l'item *injectif et non surjectif* et la non prise en compte de la surjectivité dans les deux autres items. Pour les 27 autres copies :

— l'item *injectif et non surjectif* est correctement fait dans seulement 18 copies sur 27 copies (trou dans l'ensemble de départ, dont une représentation avec un seul point isolé),
— l'item *surjectif et non injectif* est correctement fait dans 21 copies sur 27 copies (un point de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent),
— l'item *bijectif* est correctement fait dans 24 copies sur 27 copies (en L3 les deux erreurs sont la donnée d'une fonction constante et d'une fonction non injective ; en L2 il s'agit d'un item non renseigné par l'étudiant qui pourtant avait répondu correctement aux deux premiers).

L'oubli de l'ensemble d'arrivée est une erreur courante. Nous connaissons la difficulté des étudiants à lire les images d'une fonction sur l'axe des ordonnées sans que nous soyons en mesure de l'expliquer. La surjectivité est souvent vue comme « sans trou dans l'ensemble de départ » (figures 20 et 21). Il est vrai qu'il est demandé dans cet exercice une fonction mais nous pensons que la différence de définition entre application et fonction n'est en général pas prise en compte par les étudiants dans leur pratique dans le cadre de l'analyse. Ce n'est donc pas l'explication pour la présence de ces « trous » dans le cas non surjectif, d'autant plus qu'ils ne sont pas présents dans le cas de la non injectivité.

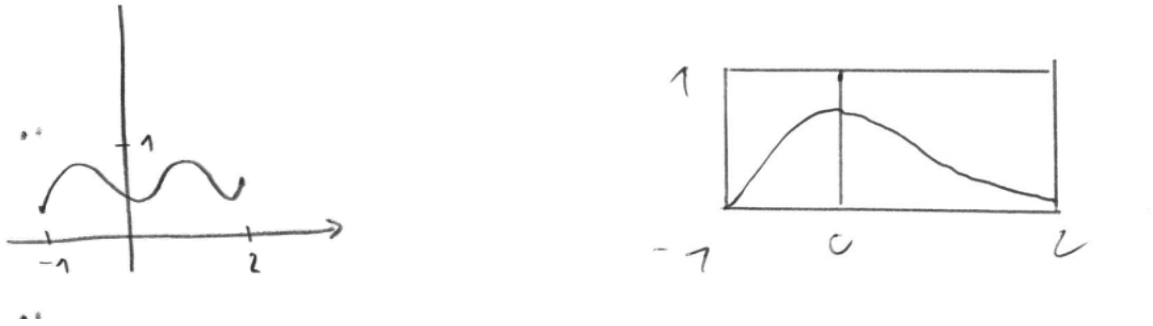


FIGURE 20 – Exemples pour *surjective et non injective* de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$ (L2-Strasbourg)

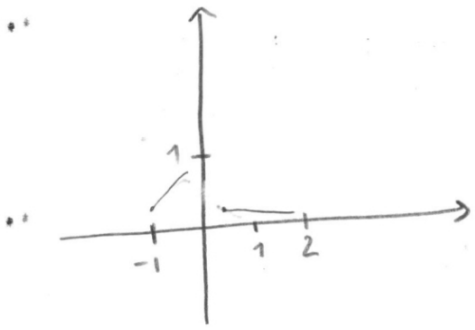


FIGURE 21 – Exemple pour *injective et non surjective* de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$ (L2-Strasbourg)

A cela s'ajoute la confusion entre ensemble d'arrivée et image, ce qui a un impact lorsqu'on demande de produire une fonction non surjective.

Remarquons enfin que l'on peut supposer que pour justifier la non-injectivité, les étudiants ne

reviennent pas à la négation de l'injectivité mais ont plutôt la règle en acte : trouver deux points de l'ensemble de départ qui ont la même image.

4.C. Suggestions d'évolution des exercices 3-4-5

Dans le tableau donné dans l'exercice 3, la colonne « langage usuel » peut être modifiée. Une suggestion pour *surjectif* serait : « tout élément de F est atteint », pour *injectif* serait : « deux éléments différents de E ont des images différentes ». De plus la représentation graphique dans le cas *bijectif* avec des ronds vides pour les points non atteints prête à confusion car cela peut donner l'impression de ne plus avoir la représentation d'une fonction en ayant deux images pour un même point. Il vaut mieux replacer ces ronds vides par des crochets comme cela a été fait dans les deux cas précédents.
Toujours dans le tableau, afin de montrer que les « trous » liés à la discontinuité des fonctions choisies pour illustrer les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité ne sont pas important pour l'illustration graphique de ces notions, on pourrait pour chaque notion présenter deux types de fonctions, l'une discontinue et l'autre continue.

Avant de proposer des exercices tels que les exercices 3-4-5, il faudrait peut-être commencer avec un exercice uniquement d'observation. Il pourrait prendre la forme suivante : 4 triplets (E, F, f) sont représentés, un de chaque type (injectif et pas surjectif, injectif et surjectif, etc ...), et il est demandé d'identifier la nature de chacun en mettant en évidence ce qui permet de décider.

Les domaines E et F, lorsqu'ils n'étaient pas $\mathbb{R}$ débutaient en 0, de plus, il est bien connu à ce niveau d'étude que la fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$. Ces deux points ont peut-être contribué à ce que les ensembles de départ et d'arrivée ne soient pas matérialisés. On pourrait par exemple proposer l'étude de $x \mapsto x^2 - 7$ avec $F = \mathbb{R}$ ou $F = [-7, +\infty[$.

On peut aussi ajouter un exercice avec une ou des erreurs et demander de modifier les tracés, avec un minimum de corrections, afin de les rendre justes. A titre d'exemple, voici une proposition de dessin avec erreurs, pris parmi les productions étudiantes (figure 22), pour laquelle une telle demande pourrait être faite.

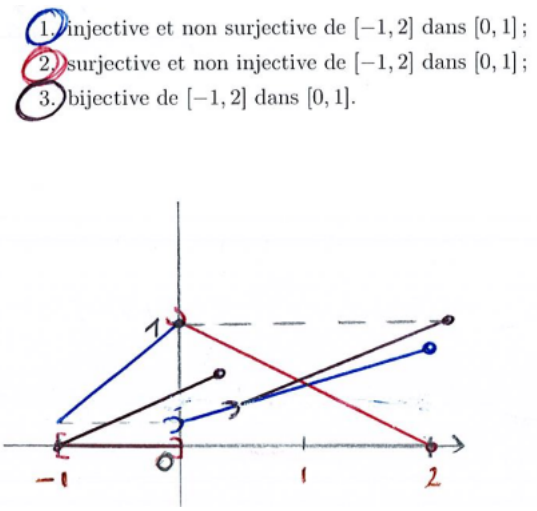


FIGURE 22 – Copie L3-Bordeaux

4.D. Conclusion pour les exercices 3-4-5

Nous avons constaté dans ces trois exercices qu'il y a plus d'erreurs dans l'identification de la non surjectivité que dans celle de la non injectivité. Les erreurs sont souvent dues à la confusion entre ensemble d'arrivée et ensemble image (droite générique tracée uniquement pour l'étude de l'injectivité dans 7 copies sur 33 cas pour l'exercice 3, 10 copies sur 34 erreurs pour la non surjectivité contre 2 copies sur 34 pour la non injectivité dans l'exercice 4). On ne travaille probablement pas assez en post-bac sur image/antécédent.

Les suites récurrentes peuvent être une occasion pour travailler ces notions, parler d'intervalles stables et donc de travailler sur un intervalle de départ et l'intervalle d'arrivée correspondant. On peut aussi utiliser les représentations graphiques de suites récurrentes, les valeurs de u_n prenant successivement le rôle d'antécédents de u_{n+1} et d'images de u_{n-1}. Ce travail pourrait être vu en L1 comme une reprise de ce qui peut se faire en terminale avant d'aborder les notions théoriques d'injectivité, surjectivité, bijectivité.

Dans le post-bac il est assez peu demandé de tracés aux étudiants, on voit dans l'exercice 5 que c'est une lacune importante. Cet exercice qui demande de la créativité est aussi plus difficile de ce fait, mais les exemples de tracés qui le précédaient auraient pu être adaptés. On peut donc émettre l'hypothèse que les images mentales de l'injectivité et surjectivité dans le cadre des représentations graphiques des fonctions n'est pas en place pour les étudiants en difficulté sur cet exercice.

On peut aussi souligner que dans l'exercice 3, bien que le registre graphique était explicitement demandé, il n'y a aucun graphique sur 2 des 42 copies et sur 6 autres il y a une absence totale de droite horizontale particularisée ou générique.

Ces deux points confirment que la production de tracés a besoin d'être travaillée dans l'enseignement supérieur et que les changements de registre faisant intervenir des tracés ont besoin d'être accompagnés.

5. Conclusion

Nous pensons que les croquis et les changements de registre qui les accompagnent peuvent aider les élèves ou étudiants à construire de manière opératoire et pérenne les notions mises en jeu dans l'ensemble de notre test.

Le croquis mis dans la colonne du milieu de l'exercice 1 a pour but d'aider au changement de registres algébrique et géométrique. Les deux exemples de l'exercice 2 sont là pour suggérer le passage du registre algébrique dans $\mathbb{R}$ au registre graphique dans $\mathbb{R}^2$ dans le cadre analytique. Les croquis du tableau de l'exercice 3 sont un moyen de donner une représentation mentale des notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité dans le registre fonctionnel.

Nous constatons cependant que les croquis et schémas proposés sous forme achevée (codage et description) ne sont pas opérationnels pour une partie des étudiants testés. Il est donc important d'expliquer en même temps leur construction, en particulier il est compliqué de rendre compte de l'aspect dynamique de ces croquis.

Cet aspect dynamique est pourtant suggéré par les flèches pour l'exercice 1 (« placer le point qui sera le milieu puis se déplacer d'une même longueur à gauche et à droite »), il est absent visuellement pour les croquis de l'exercice 2 (introduction des fonctions, tracé de leur graphe, recherche de point d'intersection et position relative puis lecture de la condition sur x sur l'axe des abscisses) et pour ceux de l'exercice 3 (droite générique d'équation $y = m$ qui se déplace verticalement).

Il nous semble donc indispensable d'inclure régulièrement un travail sur les croquis dans les exercices proposés aux étudiants. Ce n'est qu'ainsi que le croquis deviendra un outil d'aide pour eux. Ainsi les notions que l'enseignant souhaite illustrer avec des croquis seront mieux comprises et ceux-ci seront aussi des supports pour raisonner et résoudre des problèmes.

L'analyse du registre langagier et son lien avec le travail mathématique est une perspective d'étude.

Nous faisons l'hypothèse que les difficultés à nommer les objets mathématiques et à en avoir des représentations mentales sont liées.

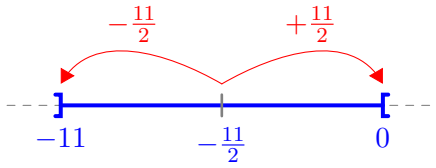
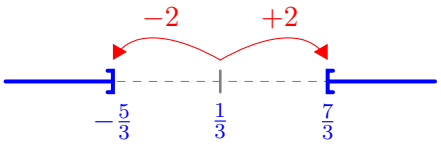
A Fiches du test

PSEUDO :

Communiquer le brouillon en y indiquant aussi le pseudo choisi.

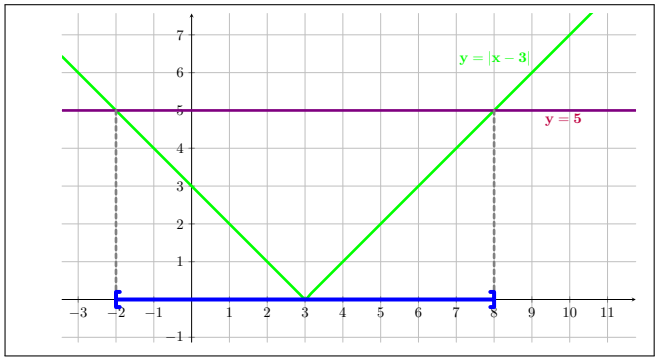
Ex1 : Dans chaque colonne du tableau ci-dessous est proposée une écriture ou une représentation d'un ensemble de réels. Compléter toutes les cases du tableau afin d'en donner une représentation équivalente.

Indiquer l'ordre de remplissage.

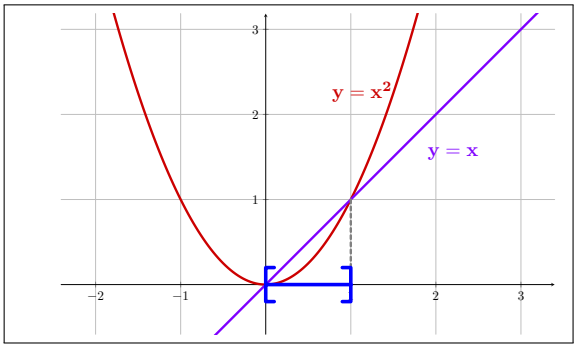
ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$				
	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$			
				
				$d(x; \frac{3}{2}) = 1$
			$\lvert x + 5 \rvert = \pi$	
				$d(x; -4) \leq 5$
			$\lvert x - 3 \rvert \leq \frac{1}{2}$	
				

Ex2 : Voici deux exemples de graphiques illustrant la proposition à leur gauche et pouvant servir de preuve.

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x-3| \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$



$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

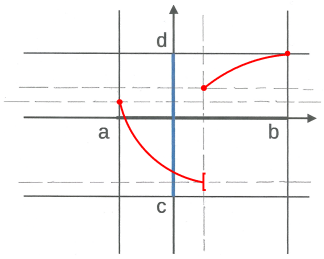
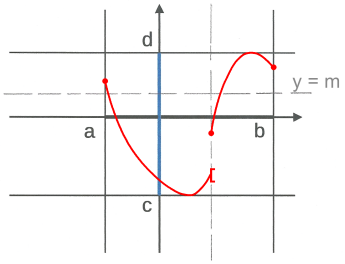
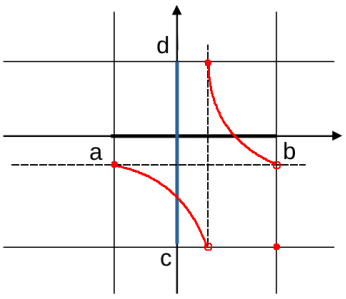


Donnez une démonstration de la proposition suivante et faites un graphique illustrant cette démonstration ou pouvant la remplacer.

Pour tout réel $a > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Big((|x| \leq |x+a|) \text{ ET } (|x| \leq |x-a|)\Big) \Rightarrow |x| \leq \frac{a}{2}.$$

Ex3 : Le tableau ci-dessous présente les notions d'injection, surjection et bijection dans différents registres (Nom de la propriété, Formel, Langage usuel, Equation, Exemple de représentation graphique).

Nom de la propriété	Langage formalisé	Langage usuel	Equation	Exemple de représentation graphique
f est **injective** de E dans F	$\forall x, x' \in E$ si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$	Tout élément m de F a *au plus* un antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a *au plus* une solution dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en *au plus* un point.  avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$
f est **surjective** de E dans F	$\forall m \in F$ $\exists x \in E$ tel que $f(x) = m$	Tout élément m de F a *au moins* un antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a *au moins* une solution dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en *au moins* un point.  avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$
f est **bijective** de E dans F	$\forall m \in F$ $\exists x \in E$ *unique* tel que $f(x) = m$	Tout élément m de F a *un et un seul* antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a *une* solution *et une seule* dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en *un* point *et un seul*.  avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$

En vous inspirant de ce qui est proposé dans le tableau précédent, justifiez si les applications ci-dessous sont ou non injective/surjective/bijective **en argumentant dans deux registres dont l'un graphique**.

1. $f(x) = x^2$, $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$;

2. $g(x) = x^2$, $E = \mathbb{R}$, $F = [0, +\infty[$;

3. $h(x) = x^2$, $E = [0, +\infty[$, $F = \mathbb{R}$;

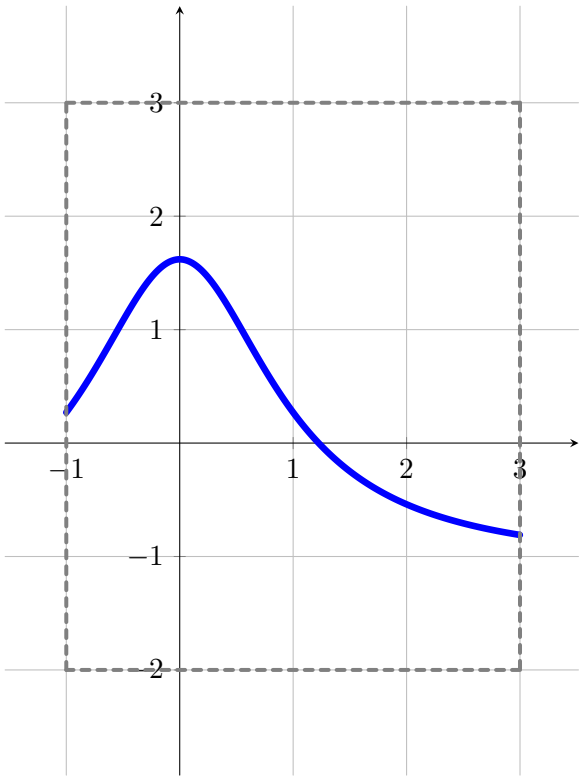
4. $l(x) = x^2$, $E = [0, +\infty[$, $F = [0, +\infty[$.

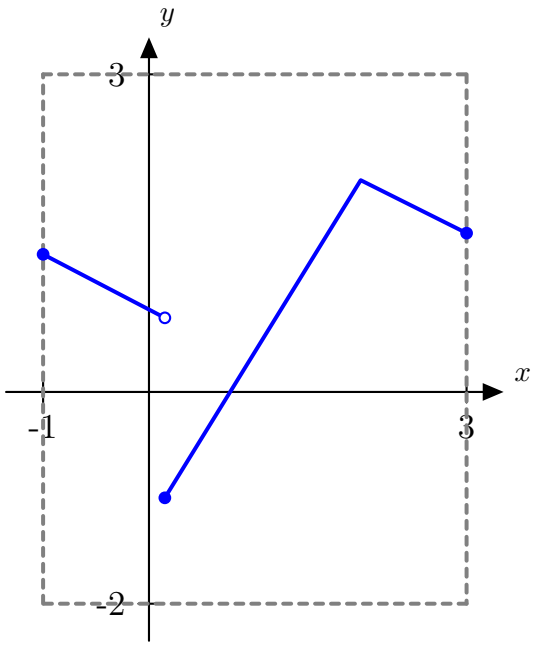
Ex4 : On a représenté ci-dessous deux fonctions de $E = [-1, 3]$ dans $F = [-2, 3]$. Pour chacune d'elle indiquez si elle est

— injective ?

— surjective ?

Justifiez graphiquement vos réponses.





Ex5 : Pour chacune des conditions ci-dessous, représentez graphiquement une fonction qui la satisfait :

1. injective et non surjective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$;

2. surjective et non injective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$;

3. bijective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$.

Références

Duval, R. (1993). registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Escoffier, J.-P. (2022). *Toute l'analyse de licence : cours, execices corrigés.* Dunod.

Gueudet, G. (2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *24*(1), 81-114.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-209.

Menini, C., & Sénéchaud, P. (2018). Les croquis et les représentations géométriques donnent-ils du sens ? In *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 409-422). IREM de Paris. Consulté sur https://hal.science/hal-02421410

Parzysz, B. (1988). Voir et savoir - la représentation du « perçu » et du « su » dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP*, *364*, 339-350.

Rogalski, M. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie.* Ellipses.

Sales, J., & Banyuls, T. (2013). *Le monde est mathématique : Courbes périlleuses - ellispses, hyperboles et autres merveilles géométriques.* RBA.

Denise Grenier
Université Grenoble Alpes, Institut Fourier - IREM
100 rue des Maths
38 610 Gières
e-mail: denise.grenier@univ-grenoble-alpes.fr

Chantal Menini
Université de Bordeaux, UF MI - IREM
351 cours de la libération
33 405 Talence Cedex
e-mail: chantal.menini@u-bordeaux.fr

Pascale Sénéchaud
Université de Limoges, FST - IREM
123 avenue Albert Thomas
87 060 Limoges Cedex
e-mail: pascale.senechaud@unilim.fr

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Cité, UFR de Mathématiques - IREM
CC 7018
75 205 Paris Cedex 13
e-mail: vandebro@univ-paris-diderot.fr