

UN DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOMMES HARMONIQUES DE KEMPNER-IRWIN

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

RÉSUMÉ. Soit $I(b, d, k)$ la sous-série de la série harmonique portant sur les entiers ayant exactement k occurrences du chiffre d en base b . Nous prouvons l'existence d'un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b , pour d et k fixés, de $I(b, d, k) - b \log(b)$ (ou plutôt, si $k = 0$ et $d > 0$ de $I(b, d, 0) - (b \log(b) - b \log(1 + 1/d))$). Nous en donnons explicitement, suivant les cas, les quatre ou cinq premiers termes. Les coefficients de ce développement font intervenir les valeurs de la fonction zêta aux entiers.

1. SOMMES HARMONIQUES ELLIPSÉPHIQUES ET THÉORÈME PRINCIPAL

La convergence des sommes harmoniques de Kempner (1914, [24]) $K(b, d) = \sum' m^{-1}$, où les entiers sont contraints à ne pas avoir le chiffre d en base b , fait l'objet du Théorème 144 de l'ouvrage de Hardy et Wright [21]. Ce thème est donc assez largement connu. Soit plus généralement $I(b, d, k) = \sum^{(k)} m^{-1}$ (Irwin 1916 [23]) avec cette fois-ci la condition que $m > 0$ possède k occurrences du chiffre d en base b . Ici encore la preuve de convergence est quasi-immédiate. Mais obtenir des évaluations numériques précises est difficile et ces séries convergent en général très lentement. Il faut semble-t-il attendre 1979 et le travail de Baillie [8] (voir [9] pour les $I(b, d, k)$, $k > 0$) pour que les $K(10, d)$ pour $d = 0, 1, \dots, 9$ soient tabulés avec chacun 20 chiffres décimaux fractionnaires, alors que Kempner indiquait seulement $K(10, 9) < 90$ et Irwin lui obtenait $22,4 < K(10, 9) < 23,3$. Depuis les premiers travaux de Kempner et Irwin, ce sujet a continué à susciter de l'intérêt et a fait l'objet de diverses études et généralisations (estimations, produits infinis, séries de Dirichlet, combinatoire, ...) et nous indiquons au lecteur intéressé quelques références : [1–9, 18–20, 22–27, 29–31, 33–36].

La suite des nombres entiers n'ayant pas certains chiffres dans une base b a fait l'objet de travaux avancés de théorie analytique des nombres, nous ne citerons ici que quelques articles d'une vaste littérature : [17], [14], [28]. Dans ce contexte Ch. Mauduit a introduit le néologisme « ellipséphique » pour faire référence aux entiers qui ne possèdent pas certains chiffres dans une base b (on trouvera dans [5] des détails sur l'étymologie). On peut donc parler de « sommes harmoniques ellipséphiques » pour les $K(b, d)$ et par extension aussi pour les $I(b, d, k)$, $k > 0$, même si le chiffre d n'est pas alors totalement manquant.

Date: v1 21 avril 2024; v2 27 avril 2024.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11Y60, 11M06; Secondary 11A63, 44A60, 30C10, 41A60;

Key words and phrases. Ellipsephic numbers, Kempner series, asymptotic expansions.

L'objet principal de l'article est le développement asymptotique de $I(b, d, k)$ pour $b \rightarrow \infty$. Voici en un seul théorème une version abrégée des résultats principaux.

Théorème 1. *Pour d et k fixés, $I(b, d, k) - b \log(b)$ admet un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b , dont le premier terme est d'ordre b^{-2k-1} si $d = 0$ et b^{-2k+1} si $d > 0$. Donc si $d > 0$ et $k = 0$, il y a un terme proportionnel à b , il s'agit de $-b \log(1 + \frac{1}{d})$. Plus précisément (tous les $O(b^{-n})$ dépendent de d et de k) :*

$$\begin{aligned}
I(b, 0, 0) &= b \log(b) + \frac{\zeta(2)}{2b} - \frac{\zeta(3)}{3b^2} + O(b^{-3}) \\
k > 0 \implies I(b, 0, k) &= b \log(b) + \frac{\zeta(2)}{2b^{2k+1}} + \frac{k\zeta(2)}{2b^{2k+2}} + O(b^{-2k-3}) \\
d > 0 \implies I(b, d, 0) &= b \log(b) - b \log(1 + \frac{1}{d}) + \frac{(d + \frac{1}{2})(\zeta(2) - d^{-2})}{b} \\
&\quad - \frac{(d^2 + d + \frac{1}{3})\zeta(3) - \frac{9d^2 + 8d + 2}{6d^3(d+1)}}{b^2} + O(b^{-3}) \\
d > 0 \implies I(b, d, 1) &= b \log(b) + \frac{d + \frac{1}{2}}{d^2b} - \frac{9d^2 + 8d + 2}{6d^3(d+1)b^2} + O(b^{-3}) \\
\left(\begin{array}{l} d > 0 \\ k > 1 \end{array} \right) \implies I(b, d, k) &= b \log(b) + \frac{d + \frac{1}{2}}{d^2b^{2k-1}} + \frac{(d + \frac{1}{2})((k-2)d + k - 3)}{d^2(d+1)b^{2k}} + O(b^{-2k-1})
\end{aligned}$$

Dans le texte qui suit, nous donnons explicitement quatre ou cinq termes dans tous les cas : Prop. 7 pour $d = 0$ et $k = 0$ (cinq termes), Prop. 8 pour $d = 0$ et $k > 0$ (quatre termes), Prop. 9 pour $d > 0$ et $k = 0$ (cinq termes), Prop. 12 pour $d > 0$ et $k = 1$ (cinq termes), Prop. 13 pour $d > 0$ et $k = 2$ (cinq termes), Prop. 14 pour $d > 0$ et $k \geq 3$ (quatre termes). Si l'on voulait un cinquième terme dans ce dernier cas il faudrait distinguer entre eux $k = 3$, $k = 4$, et $k \geq 5$.

Les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs apparaissent dans tous ces développements (même si ici on n'en voit pas partout dans les deux premiers termes), de même qu'ils étaient déjà apparus dans notre précédent travail [12] où nous avons établi :

$$K(b, b-1) = b \log(b) - \frac{\zeta(2)}{2b} - \frac{3\zeta(2) + \zeta(3)}{3b^2} - \frac{2\zeta(2) + 4\zeta(3) + \zeta(4)}{4b^3} + O(b^{-4})$$

Dans le présent article le chiffre d est fixé indépendamment de la base b . La stratégie, en partie à cause de la difficulté accrue introduite par k , est différente de celle de [12] : d'une part, au lieu de partir des séries à convergence géométrique que nous avons introduites dans ce sujet ([10, 11]), et qui utilisent les moments $u_{k;m}$ de certaines mesures μ_k sur $[0, 1]$, nous commencerons par exprimer la différence avec $b \log(b)$ comme une intégrale contre ces mesures en utilisant la fonction digamma, généralisant (pour la situation considérée ici d'un seul chiffre exclu) [13]; d'autre part nous ne cherchons pas à obtenir l'uniformité en m de certaines approximations de la valeur des moments $u_{k;m}$.

Le Théorème 1 n'a pas d'uniformité en k et donc en lui-même n'implique pas le théorème [18, 34] sur la limite pour $k \rightarrow \infty$, alors que le point de départ utilisé donne immédiatement cette limite.

Les deux premières sections sont dédiées à l'étude des moments $u_{k;m}$ comme fonctions analytiques (rationnelles) de la variable $c = b^{-1}$, principalement au niveau formel pour $c \rightarrow 0$ car nous n'essayons pas de donner des énoncés uniformes en m . Dans la troisième section, nous exprimons $I(b, d, k) - b \log(b)$ comme une combinaison d'intégrales de la fonction digamma, contre les mesures μ_k (et μ_{k-1}) généralisant ainsi [13] qui avait traité $k = 0$. L'emploi de cette fonction (et l'apparition des $\zeta(n)$ qui en découle) a un antécédent dans le travail de Fischer [19]. Une différence apparaît entre $d = 0$ (qui est proche du $d = b - 1$ de [13]) et $d > 0$ sur l'analyse à suivre de la formule intégrale. Les quatre sections qui suivent traitent successivement de $d = k = 0$, $d = 0$ et $k > 0$, $d > 0$ et $k = 0$, $d > 0$ et $k > 0$. Dans tous les cas nous transformons les intégrales en séries à convergence géométrique (qui pourraient être utilisées numériquement) donnant $I(b, d, k) - b \log(b)$. Ces séries convergentes (voir, par exemple pour $d > 0$ et $k > 0$, la Proposition 11) font intervenir les moments des mesures de [10, 11]. Nous les transformons en séries asymptotiques en puissances inverses de b . Certaines contributions sont analysées via des sommations d'Euler-MacLaurin (tout ce sujet est très lié aux nombres et polynômes de Bernoulli). Les coefficients deviennent assez rapidement complexes et volumineux, et de plus, leur dépendance (polynomiale) en k ne se stabilise que pour des k de plus en plus grands. Nous donnons suivant les cas entre quatre et cinq termes, en n'ayant à connaître alors des moments comme fonctions analytiques de $c = b^{-1}$ que deux (exceptionnellement trois) termes correctifs au pôle en $c = 0$.

Les théorèmes sont accompagnés de vérifications numériques de la cohérence de leurs prédictions. Il n'y a à notre connaissance que trois façons connues de calculer numériquement avec précision les $I(b, d, k)$: soit le code de Baillie [9], soit celui de l'auteur [10, 11], soit celui (non encore implémenté) qui utiliserait les séries évoquées dans le précédent paragraphe pour donner directement l'écart à $b \log(b)$. Nous avons utilisé dans SageMath le code fourni avec [11] pour contrôler le comportement de $I(b, d, k) - b \log(b)$ lorsque b augmente. Cet algorithme lui aussi utilise les moments $u_{k;m}$ mais d'une manière purement numérique, et en proportion linéaire du nombre de chiffres demandé ; alors que notre travail ici utilise principalement les propriétés formelles des $u_{k;m}$ comme fonctions analytiques de b , et ne nécessite pour les termes donnés que de $u_{j;0}$ à au maximum $u_{j;4}$ pour $j \in \{k, k-1, k-2\}$. Le fait que les résultats numériques semblent avoir un comportement cohérent lorsque b est multiplié par 2, 5, ou 10, est donc une validation mutuelle à la fois du code numérique et des formules sur lesquelles il est basé dans [10, 11], et des formules démontrées ici dans le présent article.

2. MESURES ET MOMENTS ASSOCIÉS AUX SOMMES D'IRWIN

Dans cette section nous rappelons les outils de [10, 11, 13] et quelques résultats nécessaires ici. Pour $b > 1$ un entier, on note $D = \{0, \dots, b-1\}$ l'ensemble des chiffres pour la base b .

L'union des produits cartésiens des D^l pour $l \geq 0$ est appelée l'espace des chaînes et est noté $\mathbf{D}$. La longueur $l \geq 0$ d'une chaîne X est l'entier tel que $X \in D^l$, et on la note $l(X)$ ou $|X|$. Une chaîne $X = (d_l, \dots, d_1)$ est aussi notée $X = "d_l \dots d_1"$ ou simplement $X = d_l \dots d_1$ sans les guillemets et définit un entier $n(X) = d_l b^{l-1} + \dots + d_1 b^0$ qui appartient à $\llbracket 0, b^l - 1 \rrbracket$. On associe aussi à X le nombre réel $x(X) = n(X)/b^{|X|} \in [0, 1[$. Lorsque X est la chaîne vide, $x(X) = 0$.

Soit $0 \leq d < b$ et $k \geq 0$ des entiers fixés. On définit une mesure μ_k , qui se trouve avoir une masse totale finie égale à b (donc indépendante de k et de d), sur l'espace $\mathbf{D}$ (muni de la tribu de toutes les parties) des chaînes en assignant la masse nulle à toute chaîne n'ayant pas k occurrences de l'entier d , et la masse $b^{-|X|}$ à celles qui ont exactement k occurrences de l'entier d . On note également μ_k la mesure sur $[0, 1[$ (muni de la tribu borélienne) obtenue par push-forward sous $X \mapsto x(X)$. La mesure μ_k dépend bien sûr aussi de b et de d , les notations sont simplifiées pour la commodité de la lecture.

Les μ_k convergent faiblement vers b fois la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$: on a établi par deux preuves distinctes dans [11] d'une part la convergence des moments $u_{k;m} = \mu_k(x^m)$ de ces mesures vers ceux de $b dx$ et d'autre part la convergence pour tout intervalle I de $\mu_k(I)$ vers b fois la longueur $|I|$ de I .

On a montré de plus dans [11] que les $u_{k;m}$ forment une suite croissante pour chaque m fixé (donc de limite $b/(m+1)$ pour $k \rightarrow \infty$) et que les moments complémentaires $v_{k;m} = \mu_k((1-x)^m)$ forment pour m fixé une suite en k décroissante (elle aussi de limite $b/(m+1)$).

La somme harmonique de Kempner-Irwin :

$$(1) \quad I(b, d, k) = \sum^{(k)} \frac{1}{m},$$

où l'exposant (k) signifie que seuls les entiers $m > 0$ ayant k occurrences du chiffre d en base b sont retenues, peut être exprimée de plusieurs manières à partir de la mesure μ_k , l'expression la plus simple étant :

$$(2) \quad I(b, d, k) = \int_{[b^{-1}, 1[} \frac{\mu_k(dx)}{x}.$$

Le théorème $\lim_{k \rightarrow \infty} I(b, d, k) = b \log(b)$ ([18, 34]) peut donc être vu via (2) comme une conséquence du théorème de convergence des μ_k vers $b dx$.

Dans [10] et [11] les fonctions

$$(3) \quad U_k(z) = \int_{[0, 1[} \frac{\mu_k(dx)}{z + x}$$

jouent un rôle important via les équations que nous rappelons maintenant. De par la définition de la mesure μ_k , $U_k(z)$ est, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$, égal à $\sum m^{-1}$ où seuls les nombres m (qui sont entiers si z est entier) apparaissent qui (lorsque $z = n \in \mathbb{N}$, $n > 0$) "débutent par n " et dont la "queue" possède exactement k fois le chiffre d , autrement dit en général $m = 10^l z + n(X)$, $|X| = l$, $k(X) = k$, $l \geq 0$. Il résulte de l'interprétation comme une série (qui pour $z = n > 0$ entier, est donc une sous-série de la série harmonique, mais pas nécessairement

de la série définissant $I(b, d, k)$, que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ on a

$$(4) \quad U_0(z) = \frac{1}{z} + \sum_{a \in \mathbb{D}, a \neq d} U_0(bz + a)$$

et pour $k \geq 1$:

$$(5) \quad U_k(z) = U_{k-1}(bz + d) + \sum_{a \in \mathbb{D}, a \neq d} U_k(bz + a)$$

On précise au passage qu'en effet $bz + a \notin [-1, 0]$ pour tout $a \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$.

On peut intégrer contre μ_k n'importe quelle fonction g bornée (sans condition de continuité) et l'on dispose des équations suivantes [11, Lemma 17] :

$$(6) \quad \int_{[0,1)} g(x) d\mu_0(x) = g(0) + \frac{1}{b} \sum_{a \neq d} \int_{[0,1)} g\left(\frac{a+x}{b}\right) d\mu_0(x)$$

et, pour $k \geq 1$:

$$(7) \quad \int_{[0,1)} g(x) d\mu_k(x) = \frac{1}{b} \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \int_{[0,1)} g\left(\frac{a+x}{b}\right) d\mu_k(x) + \frac{1}{b} \int_{[0,1)} g\left(\frac{d+x}{b}\right) d\mu_{k-1}(x)$$

Les relations (4) et (5) en sont des cas particuliers.

3. LES MOMENTS COMME FONCTIONS ANALYTIQUES DE LA BASE

Les moments $u_{k;m} = \int_{[0,1]} x^m \mu_k(dx)$ forment pour chaque k fixé une suite décroissante tendant vers zéro. Ils sont, sauf pour $b = 2$, $d = 1$ et $k = 0$, auquel cas $u_{0;m} = 0$ pour tous les $m \geq 1$, strictement positifs et forment une suite strictement décroissante pour $m \rightarrow \infty$. On sait aussi ([11, Prop. 20]) que pour chaque m fixé la suite $k \mapsto u_{k;m}$ est strictement croissante et possède la limite $b/(m+1)$.

Les $u_{k;m}$ vérifient d'après [11, eq.(15),(16)] les récurrences suivantes en k et m . Pour $k = 0$ et $m \geq 1$:

$$(8) \quad (b^{m+1} - b + 1)u_{0;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma_j u_{0;m-j}$$

avec $u_{0;0} = b$, et pour $k \geq 1$ et $m \geq 0$:

$$(9) \quad (b^{m+1} - b + 1)u_{k;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma_j u_{k;m-j} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d^j u_{k-1;m-j}$$

Dans ces équations $\gamma_j = \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} a^j$.

On a $u_{k;0} = b$ pour tout k . Pour $m = 1$, les récurrences s'écrivent :

$$(10) \quad u_{0;1} = \frac{b}{2} - \left(d + \frac{1}{2}\right) \frac{b}{b^2 - b + 1}$$

$$(11) \quad u_{k;1} = \frac{b(b^2 - b)}{2(b^2 - b + 1)} + \frac{u_{k-1;1}}{b^2 - b + 1}$$

On en déduit une formule explicite pour $u_{k;1}$:

Proposition 2. *Pour tout $k \geq 0$:*

$$(12) \quad u_{k;1} = \frac{b}{2} - \frac{b(2d+1)}{2(b^2 - b + 1)^{k+1}}$$

Démonstration. Récurrence. □

Nous allons maintenant obtenir des résultats relatifs aux $u_{k;m}$ vus comme fonctions analytiques de b , ou de $c = b^{-1}$. On a

$$(13) \quad \forall x \quad \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{bx^j}{m-j+1} = \sum_{j=0}^m \frac{b}{m+1} \binom{m+1}{j} x^j = \frac{b}{m+1} ((x+1)^{m+1} - x^{m+1})$$

donc

$$(14) \quad \sum_{0 \leq a < b} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a^j \frac{b}{m-j+1} = \frac{b}{m+1} b^{m+1}$$

Posons

$$(15) \quad w_{k;m} = \frac{b}{m+1} - u_{k;m}$$

Ainsi, pour $k \geq 1$:

$$(16) \quad b^{m+1} \left(-w_{k;m} + \frac{b}{m+1} \right) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \gamma_j \left(-w_{k;m-j} + \frac{b}{m+1-j} \right) + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d^j \left(-w_{k-1;m-j} + \frac{b}{m+1-j} \right)$$

Compte tenu de (14) on obtient pour les $w_{k;m}$ la même récurrence que pour les $u_{k;m}$ lorsque $k \geq 1$:

$$(17) \quad (b^{m+1} - b + 1)w_{k;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma_j w_{k;m-j} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} d^j w_{k-1;m-j}$$

Mais les sommes s'arrêtent en fait à $j = m-1$ puisque $w_{k;0} = 0$ pour tout k .

Pour $k = 0$, le calcul est un peu différent :

$$(18) \quad b^{m+1} \left(-w_{0;m} + \frac{b}{m+1} \right) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \gamma_j \left(-w_{0;m-j} + \frac{b}{m+1-j} \right) = - \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \gamma_j w_{0;m-j} + \frac{b}{m+1} (b^{m+1} - (d+1)^{m+1} + d^{m+1})$$

$$(19) \quad (b^{m+1} - b + 1)w_{0;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma_j w_{0;m-j} + \frac{b}{m+1} ((d+1)^{m+1} - d^{m+1})$$

Posons maintenant $c = b^{-1}$. On rappelle que $c^{j+1} \sum_{0 \leq a < b} a^j$ est un polynôme en la variable c qui s'exprime avec les nombres de Bernoulli ($B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$,

...) par la formule (la dernière égalité supposant $j \geq 2$) :

$$(20) \quad c^{j+1} \sum_{0 \leq a < b} a^j = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} B_p \frac{c^p}{j+1-p} = \frac{1}{j+1} - \frac{c}{2} + \frac{jc^2}{12} + \dots$$

Le degré dépend donc de la parité de j . Les quantités $c^{j+1}\gamma_j$ sont également des polynômes en c , en supposant ici d fixé à une valeur indépendante de b :

$$(21) \quad c^{j+1}\gamma_j = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} B_p \frac{c^p}{j+1-p} - d^j c^{j+1}$$

$$(22) \quad = \begin{cases} 1 - c & (j = 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - dc^2 & (j = 1) \\ \frac{1}{j+1} - \frac{1}{2}c + \frac{j}{12}c^2 + O(c^3) & (j \geq 2) \end{cases}$$

Par les calculs précédents, pour $m \geq 1$:

$$(23) \quad (1 - c^m + c^{m+1})w_{0;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} c^{m-j} c^{j+1}\gamma_j w_{0;m-j} + ((d+1)^{m+1} - d^{m+1}) \frac{c^m}{m+1}$$

On a $w_{0;0} = 0$ et (comme déjà vu précédemment)

$$(24) \quad w_{0;1} = (d + \frac{1}{2}) \frac{c}{1 - c + c^2}$$

Dans la récurrence (23) la sommation porte en fait sur $1 \leq j \leq m-1$ puisque $w_{0;0} = 0$. Comme dans [12] il en résulte que les $w_{0;m}$ sont des fractions rationnelles de c qui ont leurs pôles en dehors du disque ouvert $D(0, \rho)$ avec $\rho^2(\rho+1) = 1, \rho \approx 0,755$.

Dans la sommation sur j , les termes contribués par $j \leq m-2$ sont $O(c^3)$. Donc à $O(c^3)$ près il suffit de regarder la contribution du terme en $j = m-1$ qui donnera seulement une contribution en c^2 . Le terme extérieur à la somme est $(2d+1)c^2/3$ pour $m = 2$ et $O(c^3)$ pour $m = 3$ et $O(c^4)$ pour $m \geq 4$. Nous pouvons donc écrire $w_{0;m} = \alpha_{0;m}c^2 + O(c^3)$ et nous obtenons

$$(25) \quad (1 - c^m + c^{m+1})\alpha_{0;m}c^2 = mc \frac{1}{m} (d + \frac{1}{2})c + \delta_{m=2}(3d^2 + 3d + 1)c^2/3 + O(c^3)$$

donc $\alpha_{0;2} = d^2 + 2d + \frac{5}{6}$ tandis que $\alpha_{0;m} = d + \frac{1}{2}$ pour $m \geq 3$. On peut également obtenir le terme suivant en c^3 , et le démontrer par une récurrence qui sera laissée au lecteur :

$$(26) \quad \frac{b}{2} - u_{0;1} = w_{0;1} = (d + \frac{1}{2}) \frac{c}{1 - c + c^2}$$

$$(27) \quad \frac{b}{3} - u_{0;2} = w_{0;2} = (d^2 + 2d + \frac{5}{6})c^2 + O(c^4)$$

$$(28) \quad \frac{b}{4} - u_{0;3} = w_{0;3} = (d + \frac{1}{2})c^2 + (d + \frac{1}{2})d(d+1)c^3 + O(c^4)$$

$$(29) \quad \frac{b}{m+1} - u_{0;m} = w_{0;m} = (d + \frac{1}{2})c^2 - (d + \frac{1}{2})(\frac{m}{2} - 1)c^3 + O_m(c^4) \quad (m \geq 4)$$

On va maintenant obtenir un résultat analogue pour les $w_{k;m} = b/(m+1) - u_{k;m}$, pour $k \geq 1$.

Proposition 3. *Soit $k \geq 0$. Les $w_{k;m} = \frac{b}{m+1} - u_{k;m}$ sont des fractions rationnelles en $c = b^{-1}$ qui ont leurs pôles en dehors du disque ouvert de rayon ρ avec $\rho^2(\rho+1) = 1$, $\rho \approx 0,755$. L'ordre de multiplicité de c comme zéro de $w_{k;m}$ est $2k+2$ lorsque $m \geq 2$. On a $w_{k;1} = (d + \frac{1}{2}) \frac{c^{2k+1}}{(1-c+c^2)^{k+1}}$. Pour $k \geq 2$:*

$$(30) \quad w_{k;1} = (d + \frac{1}{2})c^{2k+1} + (d + \frac{1}{2})(k+1)c^{2k+2} + O_k(c^{2k+3})$$

$$(31) \quad w_{k;2} = 2(d + \frac{1}{2})^2 c^{2k+2} + (d + \frac{1}{2})^2 (2k+2)c^{2k+3} + O_k(c^{2k+4})$$

$$(32) \quad w_{k;3} = (d + \frac{1}{2})c^{2k+2} + (d + \frac{1}{2})(3d^2 + \frac{2k-1}{2})c^{2k+3} + O_k(c^{2k+4})$$

$$(33) \quad m \geq 4 \implies w_{k;m} = (d + \frac{1}{2})c^{2k+2} - (d + \frac{1}{2})(\frac{m}{2} - k - 1)c^{2k+3} + O_{k,m}(c^{2k+4})$$

Pour $k \in \{0, 1\}$ les mêmes formules s'appliquent à l'exception de

$$(34) \quad w_{0;2} = (d^2 + 2d + \frac{5}{6})c^2 + 0 \cdot c^3 + O(c^4)$$

$$(35) \quad w_{0;3} = (d + \frac{1}{2})c^2 + (d + \frac{1}{2})d(d+1)c^3 + O(c^4)$$

$$(36) \quad w_{1;2} = 2(d + \frac{1}{2})^2 c^4 + (3d^2 + 4d + \frac{4}{3})c^5 + O(c^6)$$

Démonstration. On connaît déjà les $w_{k;1} = (d + \frac{1}{2}) \frac{c^{2k+1}}{(1-c+c^2)^{k+1}}$ et donc le début de leur développement en puissances de c . Donc pour $k = 0$ ainsi que pour tout k et $m = 1$ les affirmations faites sur les développements en séries de puissances de c ont déjà été établies.

On peut écrire (17) avec la variable $c = b^{-1}$:

$$(37) \quad (1 - c^m + c^{m+1})w_{k;m} = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} c^{m-j} c^{j+1} \gamma_j w_{k;m-j} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} c^{m+1} d^j w_{k-1;m-j}$$

Il en résulte que ce sont des fractions rationnelles dont les pôles sont parmi les racines de $(1 - c + c^2)(1 - c^2 + c^3) \dots (1 - c^m + c^{m+1})$ et celles-ci sont de modules au moins ρ (cf [12] pour les détails).

Considérons tout d'abord $w_{1;2}$. On a

$$(38) \quad (1 - c^2 + c^3)w_{1;2} = 2c^3 \gamma_1 w_{1;1} + c^3(w_{0;2} + 2dw_{0;1})$$

avec $c^2 \gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - dc^2$. Ainsi :

$$(39) \quad (1 + O(c^2))w_{1;2} = c(1-c)(d + \frac{1}{2})(c^3 + 2c^4) + c^3 \left((d^2 + 2d + \frac{5}{6})c^2 + 2d(d + \frac{1}{2})(c + c^2) \right) + O(c^6)$$

ce qui donne après simplification la formule de l'énoncé.

Maintenant nous regardons $w_{1;3}$.

$$(40) \quad (1 - c^3 + c^4)w_{1;3} = 3c^2 c^2 \gamma_1 w_{1;2} + 3cc^3 \gamma_2 w_{1;1} + c^4(w_{0;3} + 3dw_{0;2} + 3d^2 w_{0;1})$$

La contribution $3c^2c^2\gamma_1w_{1;2}$ est $O(c^6)$. Le deuxième terme donne :

$$(41) \quad 3cc^3\gamma_2w_{1;1} = 3c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}c\right)\left(d + \frac{1}{2}\right)(c^3 + 2c^4) + O(c^6) = c^4\left(1 + \frac{c}{2}\right)\left(d + \frac{1}{2}\right) + O(c^6)$$

Le dernier terme donne c^4 fois $O(c^2) + O(c^2) + 3d^2(d + \frac{1}{2})c$. Au total nous trouvons

$$(42) \quad w_{1;3} = \left(d + \frac{1}{2}\right)c^4 + \left(\frac{1}{2}\left(d + \frac{1}{2}\right) + 3d^2\left(d + \frac{1}{2}\right)\right)c^5 + O(c^6)$$

ce qui donne la formule de l'énoncé.

Considérons maintenant $w_{1;m}$ pour $m > 3$. Dans la deuxième somme les $w_{0;m-j}$ sont pour $j \leq m-2$ d'ordre au moins c^2 et il y a un facteur global c^{m+1} donc on peut les négliger. Le terme en $j = m-1$ donne $mc^{m+1}d^{m-1}w_{0;1}$ or $w_{0;1} = O(c)$ donc on obtient un $O(c^6)$ pour tout $m \geq 4$ donc lui aussi est négligeable. Dans la première somme de la formule de récurrence (37) les termes avec $j \leq m-2$ ont un coefficient c^{m-j} d'ordre au moins c^2 qui multiplie $w_{1;m-j}$ qui est $O(c^4)$. Donc à $O(c^6)$ près on peut les négliger. Le terme en $j = m-1$ est $mc\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}c\right)w_{1;1}$ donc contribue $c\left(1 - \frac{m}{2}c\right)\left(d + \frac{1}{2}\right)c^3(1 + 2c) = \left(d + \frac{1}{2}\right)(c^4 + (2 - \frac{m}{2})c^5) + O(c^6)$ et on obtient la formule de l'énoncé.

On regarde maintenant $w_{2;m}$. On a déjà la formule explicite pour $w_{2;1}$.

$$(43) \quad (1 - c^2 + c^3)w_{2;2} = 2c^3\gamma_1w_{2;1} + c^3(w_{1;2} + 2dw_{1;1})$$

avec $c^2\gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + O(c^2)$. Ainsi :

$$(44) \quad (1 + O(c^2))w_{2;2} = c(1 - c)\left(d + \frac{1}{2}\right)(c^5 + 3c^6) + c^3\left(2\left(d + \frac{1}{2}\right)^2c^4 + 2d\left(d + \frac{1}{2}\right)(c^3 + 2c^4)\right) + O(c^8)$$

et après simplification $w_{2;2} = 2\left(d + \frac{1}{2}\right)^2c^6 + 6\left(d + \frac{1}{2}\right)^2c^7 + O(c^8)$ qui est la formule de l'énoncé.

La formule pour $w_{2;3}$ est

$$(45) \quad (1 - c^3 + c^4)w_{2;3} = 3c^2c^2\gamma_1w_{2;2} + 3cc^3\gamma_2w_{2;1} + c^4(w_{1;3} + 3dw_{1;2} + 3d^2w_{1;1})$$

La contribution $3c^2c^2\gamma_1w_{2;2}$ est $O(c^8)$. Le deuxième terme donne :

$$(46) \quad 3cc^3\gamma_2w_{2;1} = 3c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}c\right)\left(d + \frac{1}{2}\right)(c^5 + 3c^6) + O(c^8) = c^6\left(1 + \frac{3}{2}c\right)\left(d + \frac{1}{2}\right) + O(c^8)$$

Le dernier terme donne c^4 fois $O(c^4) + O(c^4) + 3d^2(d + \frac{1}{2})c^3$. Au total nous trouvons

$$(47) \quad w_{2;3} = \left(d + \frac{1}{2}\right)c^6 + \left(\frac{3}{2}\left(d + \frac{1}{2}\right) + 3d^2\left(d + \frac{1}{2}\right)\right)c^7 + O(c^8)$$

ce qui donne la formule de l'énoncé.

On fait ensuite $w_{2;m}$ pour $m \geq 4$ comme on a traité $w_{1;m}$. Puis par récurrence sur k on repète les arguments précédents, en calculant d'abord $w_{k;2}$ et $w_{k;3}$ qui nécessitent une discussion particulière avant de s'occuper des $w_{k;m}$ pour $m \geq 4$. $\square$

4. MOMENTS COMPLÉMENTAIRES

Les quantités $v_{k;m} = \int_{[0,1[} (1-x)^m \mu_k(dx)$ vérifient d'après [11, eq. (25), (26)] les récurrences suivantes. Pour $k \geq 1$:

$$(48) \quad (b^{m+1} - b + 1)v_{k;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma'_j v_{k;m-j} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (d')^j v_{k-1;m-j}$$

avec $d' = b - 1 - d$ et $\gamma'_j = \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d'}} a^j$. Et pour $k = 0$:

$$(49) \quad (b^{m+1} - b + 1)v_{0;m} = b^{m+1} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma'_j v_{0;m-j}$$

Posons $z_{k;m} = v_{k;m} - b/(m+1)$. Ainsi, pour $k \geq 1$:

$$(50) \quad b^{m+1} \left(z_{k;m} + \frac{b}{m+1} \right) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \gamma'_j \left(z_{k;m-j} + \frac{b}{m+1-j} \right) + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (d')^j \left(z_{k-1;m-j} + \frac{b}{m+1-j} \right)$$

$$(51) \quad (b^{m+1} - b + 1)z_{k;m} = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma'_j z_{k;m-j} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (d')^j z_{k-1;m-j}$$

En fait les sommes sur j s'arrêtent à $m-1$ puisque $z_{k;0} = 0$ pour tout k . Et par ailleurs pour $k = 0$:

$$(52) \quad b^{m+1} \left(z_{0;m} + \frac{b}{m+1} \right) = b^{m+1} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \gamma'_j \left(z_{0;m-j} + \frac{b}{m+1-j} \right)$$

$$(53) \quad = b^{m+1} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \gamma'_j z_{0;m-j} + \frac{b}{m+1} \left(b^{m+1} - (d'+1)^{m+1} + (d')^{m+1} \right)$$

$$(54) \quad (b^{m+1} - b + 1)z_{0;m} = b^{m+1} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \gamma'_j z_{0;m-j} - \frac{b}{m+1} \left((d'+1)^{m+1} - (d')^{m+1} \right)$$

Soit $c = b^{-1}$. Rappelons que $d' = b - 1 - d$, donc avec les nombres de Bernoulli,

$$(55) \quad c^{j+1} \gamma'_j = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} B_p \frac{c^p}{j+1-p} - c(1 - (1+d)c)^j,$$

est également un polynôme en c :

$$(56) \quad c^{j+1} \gamma'_j = \begin{cases} 1 - c & (j = 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c + (d+1)c^2 & (j = 1) \\ \frac{1}{j+1} - \frac{3}{2}c + jc^2 \left(\frac{1}{12} + 1 + d \right) + \dots & (j \geq 2) \end{cases}$$

Par les calculs précédents

(57)

$$\begin{aligned}
 (1 - c^m + c^{m+1})z_{0;m} &= 1 + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} c^{m-j} c^{j+1} \gamma'_j z_{0;m-j} - \frac{(1 - dc)^{m+1} - (1 - (d+1)c)^{m+1}}{(m+1)c} \\
 (58) \quad &= \frac{(m+1)c - (1 - dc)^{m+1} + (1 - (d+1)c)^{m+1}}{(m+1)c} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} c^{m-j} c^{j+1} \gamma'_j z_{0;m-j}
 \end{aligned}$$

Comme dans [12] il en résulte que les $z_{0;m}$ sont des fonctions rationnelles de c qui sont leurs pôles en dehors du disque ouvert $D(0, \rho)$ avec $\rho^2(\rho + 1) = 1$, $\rho \approx 0,755$. De plus $z_{0;0} = 0$ et

$$(59) \quad z_{0;1} = (d + \frac{1}{2}) \frac{c}{1 - c + c^2}$$

Dans la récurrence, comme $z_{0;m} = 0$ la sommation porte en fait sur $1 \leq j \leq m-1$. Donc par récurrence les $z_{0;m}$ n'ont pas de terme constant dans leurs développements en puissances de c . Écrivons $z_{0;m} = \alpha_{0;m}c + \beta_{0;m}c^2 + \dots$. Dans la sommation sur j , les termes en $j \leq m-2$ sont $O(c^3)$, donc il suffit de regarder uniquement la contribution du terme en $j = m-1$ et il ne contribuera d'ailleurs qu'à c^2 :

$$\begin{aligned}
 (60) \quad (1 - c^m + c^{m+1})(\alpha_{0;m}c + \beta_{0;m}c^2 + \dots) &= \frac{(m+1)c - (1 - dc)^{m+1} + (1 - (d+1)c)^{m+1}}{(m+1)c} \\
 &\quad + mc(\frac{1}{m-1+1} + O(c))z_{0;1} + O(c^3) \\
 (61) \quad &= \frac{(2d+1)m}{2}c - \frac{(3d^2 + 3d + 1)m(m-1)}{6}c^2 \\
 &\quad + (d + \frac{1}{2})c^2 + O(c^3)
 \end{aligned}$$

ce qui donne pour $m \geq 2$:

$$(62) \quad \alpha_{0;m} = \frac{(2d+1)m}{2}$$

$$(63) \quad \beta_{0;m} = d + \frac{1}{2} - \frac{(3d^2 + 3d + 1)m(m-1)}{6}$$

Il se trouve que ces formules sont aussi valables pour $m = 1$. Donc, pour $k = 0$ et $m \geq 1$:

$$(64) \quad v_{0;m} = \frac{b}{m+1} + \frac{(2d+1)m}{2}b^{-1} - \left(\frac{(3d^2 + 3d + 1)m(m-1)}{6} - (d + \frac{1}{2}) \right)b^{-2} + O_m(b^{-3})$$

On va maintenant obtenir un résultat analogue pour les $z_{k;m} = v_{k;m} - b/(m+1)$, $k \geq 1$. Tout d'abord, avec les notations de la section précédente on a pour tout k , $u_{k;1} + v_{k;1} = b$ donc $z_{k;1} = w_{k;1}$ est donné par la formule explicite

$$(65) \quad z_{k;1} = (d + \frac{1}{2}) \frac{c^{2k+1}}{(1 - c + c^2)^{k+1}} = (d + \frac{1}{2})c^{2k+1} + (d + \frac{1}{2})(k+1)c^{2k+2} + O_k(c^{2k+3})$$

Nous allons montrer par récurrence sur k et m que plus généralement on a les développements analytiques au voisinage de $c = 0$:

$$(66) \quad \forall k \geq 0, m \geq 1 \quad z_{k;m} = \alpha_{k,m} c^{2k+1} + \beta_{k,m} c^{2k+2} + O_{k,m}(c^{2k+3})$$

pour des coefficients que nous allons déterminer. On pourrait pour cela utiliser la Proposition 3 mais on fait la preuve directement. On remarque que dans la Proposition 3, pour $m \geq 2$ la multiplicité de c dans $w_{k;m}$ était $2k+2$ alors qu'ici on va voir que l'ordre de c dans $z_{k;m}$ est $2k+1$. On a montré précédemment déjà que $z_{k;m}$ s'annule au moins à l'ordre 1 en $c = 0$ pour $k = 0$ et tous les m . Et par la formule explicite pour $z_{k;1}$ on sait que ce dernier s'annule à l'ordre $2k+1$ en $c = 0$.

Supposons vrai pour $k' < k$ et tous les m' , et pour $k' = k$ et $m' < m$ que $z_{k',m'}$ s'annule au moins à l'ordre $2k' + 1$ à l'origine. On a d'après (51)

$$(67) \quad (1 - c^m + c^{m+1})z_{k;m} = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} c^{m-j} c^{j+1} \gamma'_j z_{k;m-j} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} c^{m-1-j} c^2 z_{k-1;m-j} (1 - (d+1)c)^j$$

On rappelle que $d' = b - 1 - d$, d'où $cd' = 1 - (d+1)c$. La deuxième somme est par récurrence $O(c^{2+2k-1})$. La première somme est par récurrence $c \times O(c^{2k+1})$. On a donc à ce stade établi que $z_{k;m}$ s'annule en $c = 0$ au moins à l'ordre $2k+1$. Cherchons maintenant plus précisément $\alpha_{k;m}$ et $\beta_{k;m}$. Le facteur $(1 - c^m + c^{m+1})$ ne contribue pas puisque $m \geq 2$. La première somme ne contribue pas au terme en c^{2k+1} . Pour la deuxième somme, seul son dernier terme en $j = m-1$ y contribue et on obtient :

$$(68) \quad \alpha_{k;m} = m\alpha_{k-1;1} = m(d + \frac{1}{2})$$

Pour le terme suivant en c^{2k+2} on reprend le raisonnement plus précisément en conservant le terme en $j = m-1$ de la première somme et les termes en $j = m-1$ et $j = m-2$ de la deuxième somme. Et on obtient :

$$(69) \quad \alpha_{k;m} + \beta_{k;m}c = mc \frac{1}{m} \alpha_{k;1} + m(\alpha_{k-1;1} + \beta_{k-1;1}c)(1 - (m-1)(d+1)c) + \binom{m}{2} c \alpha_{k-1;2} + O(c^2)$$

$$(70) \quad \begin{aligned} \beta_{k;m} &= \alpha_{k;1} + m\beta_{k-1;1} - m(m-1)(d+1)\alpha_{k-1;1} + \binom{m}{2} \alpha_{k-1;2} \\ &= (d + \frac{1}{2}) \left(1 + mk - m(m-1)d \right) \end{aligned}$$

Ces formules pour $\alpha_{k;m}$ et $\beta_{k;m}$ ont été établies pour $m \geq 2$ (et $k \geq 1$). On vérifie qu'en fait elles fonctionnent aussi pour $m = 1$. Rassemblons nos résultats dans une proposition, exprimée à nouveau avec les $v_{k;m}$:

Proposition 4. *Pour $k = 0$ et $m \geq 1$:*

$$(71) \quad v_{0;m} = \frac{b}{m+1} + \frac{(d + \frac{1}{2})m}{b} - \frac{(d^2 + d + \frac{1}{3})\frac{m(m-1)}{2} - d - \frac{1}{2}}{b^2} + O_m(b^{-3})$$

Pour $k \geq 1$ et $m \geq 1$:

$$(72) \quad v_{k;m} = \frac{b}{m+1} + \frac{(d + \frac{1}{2})m}{b^{2k+1}} + \frac{(d + \frac{1}{2})(1 + mk - m(m-1)d)}{b^{2k+2}} + O_{k,m}(b^{-2k-3})$$

Pour $m = 1$ on a la formule explicite $v_{k;1} = \frac{b}{2} + (d + \frac{1}{2})\frac{c^{2k+1}}{(1-c+c^2)^{k+1}}$ valable pour tout $k \geq 0$.

5. DIGAMMA

Dans cette section nous étendons à $k > 0$ notre travail précédent [13] qui était pour $k = 0$ (mais possiblement avec plusieurs chiffres exclus). Soit $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ la fonction digamme. Elle vérifie l'équation fonctionnelle [16, 1.7.1 (8)] :

$$(73) \quad \frac{1}{x} = \psi(x+1) - \psi(x) ,$$

donc

$$(74) \quad I(b, d, k) = \int_{[b^{-1}, 1[} \frac{\mu_k(dx)}{x} = \underbrace{\int_{[b^{-1}, 1[} \psi(x+1) \mu_k(dx)}_{I_k} - \underbrace{\int_{[b^{-1}, 1[} \psi(x) \mu_k(dx)}_{J_k}$$

Nous supposons $k \geq 1$ et examinons d'abord la quantité J_k . De par le lemme d'intégration (7) :

$$(75) \quad J_k = \int_{[0, 1[} \mathbf{1}_{[b^{-1}, 1[}(x) \psi(x) \mu_k(dx)$$

$$(76) \quad = \int_{[0, 1[} \frac{1}{b} \sum_{a \neq d, a > 0} \psi\left(\frac{a+x}{b}\right) \mu_k(dx) + \delta_{d>0} \int_{[0, 1[} \frac{1}{b} \psi\left(\frac{d+x}{b}\right) \mu_{k-1}(dx)$$

On a la relation (voir [16, 1.7.1. (12)] et [13, eq.(6)]) :

$$(77) \quad \frac{1}{b} \sum_{1 \leq a \leq b} \psi\left(\frac{a+x}{b}\right) = \psi(x+1) - \log(b)$$

et ainsi

$$(78) \quad \frac{1}{b} \sum_{a \neq d, a > 0} \psi\left(\frac{a+x}{b}\right) = \psi(x+1) - \log(b) - \frac{1}{b} \psi\left(\frac{b+x}{b}\right) - \delta_{d>0} \frac{1}{b} \psi\left(\frac{d+x}{b}\right)$$

donc, compte tenu de $\mu_k([0, 1]) = b$:

$$(79) \quad \begin{aligned} J_k = \int_{[0, 1[} \psi(x+1) \mu_k(dx) &- b \log(b) - \frac{1}{b} \int_{[0, 1[} \psi\left(\frac{b+x}{b}\right) \mu_k(dx) \\ &- \delta_{d>0} \frac{1}{b} \int_{[0, 1[} \psi\left(\frac{d+x}{b}\right) \mu_k(dx) \\ &+ \delta_{d>0} \frac{1}{b} \int_{[0, 1[} \psi\left(\frac{d+x}{b}\right) \mu_{k-1}(dx) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$(80) \quad I_k = \int_{[0,1[} \psi(x+1) \mu_k(dx) - \int_{[0,b^{-1}[} \psi(x+1) \mu_k(dx)$$

et en distinguant les cas $d = 0$ et $d > 0$:

$$(81) \quad \int_{[0,b^{-1}[} \psi(x+1) \mu_k(dx) = \int_{[0,1[} \frac{1}{b} \psi\left(\frac{x}{b} + 1\right) \begin{cases} \mu_k(dx) & (d > 0) \\ \mu_{k-1}(dx) & (d = 0) \end{cases}$$

Ainsi nous obtenons

$$(82) \quad I_k = \int_{[0,1[} \psi(x+1) \mu_k(dx) - \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{b+x}{b}\right) \begin{cases} \mu_k(dx) & (d > 0) \\ \mu_{k-1}(dx) & (d = 0) \end{cases}$$

En combinant (82) et (79) il vient :

$$(83) \quad \begin{aligned} I_k - J_k &= b \log(b) + \delta_{d=0} \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{b+x}{b}\right) \mu_k(dx) \\ &\quad - \delta_{d=0} \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{b+x}{b}\right) \mu_{k-1}(dx) \\ &\quad + \delta_{d>0} \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{d+x}{b}\right) \mu_k(dx) \\ &\quad - \delta_{d>0} \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{d+x}{b}\right) \mu_{k-1}(dx) \end{aligned}$$

Proposition 5. Soit $d_1 = d$ si $d > 0$ et $d_1 = b$ si $d = 0$. Alors (en prenant garde que les μ_k dépendent de b et de d), pour $k \geq 1$:

$$(84) \quad I(b, d, k) = b \log(b) + \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{d_1+x}{b}\right) (\mu_k - \mu_{k-1})(dx)$$

et pour $k = 0$:

$$(85) \quad I(b, d, 0) = b \log(b) - \psi(1) + \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \psi\left(\frac{d_1+x}{b}\right) \mu_0(dx)$$

Démonstration. Le cas $k \geq 1$ est (83) et le cas $k = 0$ est [12, Prop.1]. $\square$

Dans le présent article nous nous intéressons principalement à l'asymptotique pour $b \rightarrow \infty$, à d fixé. Donc les formules ci-dessus sont nettement plus avantageuses dans le cas $d = 0$ car l'argument de la fonction digamma $\psi(t)$ se retrouve au voisinage de $t = 1$, tandis que pour $d > 0$ fixé il se retrouve au voisinage du pôle en $t = 0$. Nous reformulons donc la proposition pour $d > 0$ sous une forme directement équivalente mais potentiellement plus utile :

Proposition 6. Soit $d > 0$. Pour $k \geq 1$:

$$(86) \quad \begin{aligned} I(b, d, k) &= b \log(b) + \int_{[0,1[} \frac{(\mu_{k-1} - \mu_k)(dx)}{d+x} \\ &\quad + \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \left(\psi\left(1 + \frac{d+x}{b}\right) - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) \right) (\mu_k - \mu_{k-1})(dx) \end{aligned}$$

Pour $k = 0$ (et avec $\mu_\infty(dx) = bdx$) :

$$(87) \quad \begin{aligned} I(b, d, 0) &= b \log(b) - b \log\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) - \psi(1) \\ &\quad + \int_{[0,1[} \frac{(\mu_\infty - \mu_0)(dx)}{d + x} \\ &\quad + \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \left(\psi\left(1 + \frac{d+x}{b}\right) - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) \right) \mu_0(dx) \end{aligned}$$

Nota bene : on prendra garde que les mesures μ_k , $k \geq 0$, dépendent de b et de d .

Démonstration. Conséquence directe de l'équation fonctionnelle $\psi(x) = -x^{-1} + \psi(x+1)$ [16, 1.7.1 (8)] et du fait que μ_k a une masse totale égale à b indépendante de k . On peut aussi utiliser uniquement $\psi(1)$ mais la forme retenue avec $\psi(1 + \frac{d}{b})$ est plus commode pour les prochaines sections, c'est aussi la raison de l'apparition de μ_∞ . $\square$

6. $d = 0$ ET $k = 0$

Dans cette section nous supposons $d = 0$ et $k = 0$. La formule (85) est donc avec $d_1 = b$ et donne

$$(88) \quad I(b, 0, 0) = b \log(b) + \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \left(\psi\left(1 + \frac{x}{b}\right) - \psi(1) \right) \mu_0(dx)$$

Le développement de Taylor suivant ([16, 1.17 (5)]) converge normalement pour $|u-1| \leq 1-\eta$, $\eta > 0$:

$$(89) \quad \psi(u) - \psi(1) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta(m+1) (u-1)^m$$

Donc avec $u = 1 + \frac{x}{b}$, $0 \leq x < 1$, et en rappelant $u_{0;m} = \int_{[0,1[} x^m \mu_0(dx)$:

$$(90) \quad K(b, 0) = b \log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\zeta(m+1) u_{0;m}}{b^{m+1}}$$

En utilisant les majorations triviales $0 \leq u_{0;m} \leq b/(m+1)$ et $1 \leq \zeta(m+1) \leq \zeta(2)$ et le fait que $u_{0;m}$ est une fonction rationnelle de $c = b^{-1}$ avec un pôle simple à l'origine, on voit qu'à $O(b^{-M})$ près, pour n'importe quel M , l'expression est donnée par une somme partielle qui est une fraction rationnelle en b régulière (et même nulle) à l'origine comme fonction de $c = b^{-1}$. D'où l'assertion : $I(b, 0, 0) - b \log(b)$ admet un développement asymptotique $a_1/b + a_2/b^2 + \dots$ à tous les ordres en puissances inverses de b lorsque $b \rightarrow \infty$. Pour obtenir quelques termes de ce développement il est commode d'écrire $u_{0;m} = \frac{b}{m+1} - w_{0;m}$:

$$(91) \quad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\zeta(m+1) u_{0;m}}{b^{m+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\zeta(m+1)}{(m+1)b^m} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \zeta(m+1) \frac{w_{0;m}}{b^{m+1}}$$

La première somme vaut $-\int_0^1 (\psi(1) - \psi(1 + \frac{x}{b})) dx = b \log \Gamma(1 + \frac{1}{b}) - \psi(1)$. Dans la deuxième somme on connaît exactement le premier terme $w_{0;1} = \frac{c}{2}(1 - c + c^2)^{-1} = \frac{b}{2(b^2 - b + 1)}$. On peut

aussi donner une formule exacte pour $w_{0;2}$, mais ça devient compliqué. En tout cas on sait par la Proposition 3 qu'il vaut $\frac{5}{6}b^{-2} + O(b^{-4})$. Tous les $w_{0;m}$ suivants sont $O(b^{-2})$ donc le terme en $m = 2$ contribue un $\frac{5}{6}\zeta(3)b^{-5}$ qui ne peut pas être altéré par la suite. Ceci nous donne le théorème suivant :

Proposition 7. *L'écart à $b\log(b)$ de la somme harmonique de Kempner $K(b, 0) = \sum' \frac{1}{m}$ où les entiers n'ont pas le chiffre 0 dans leur écriture en base b admet un développement asymptotique en puissances inverses de b à tous les ordres. On a :*

$$\begin{aligned} K(b, 0) &= b\log(b) + b\log\Gamma(1 + \frac{1}{b}) - \psi(1) - \frac{\zeta(2)}{2b(b^2 - b + 1)} + \frac{5\zeta(3)}{6b^5} + O(b^{-6}) \\ &= b\log(b) + \frac{\zeta(2)}{2b} - \frac{\zeta(3)}{3b^2} - \frac{2\zeta(2) - \zeta(4)}{4b^3} - \frac{5\zeta(2)/2 + \zeta(5)}{5b^4} + \frac{5\zeta(3) + \zeta(6)}{6b^5} + O(b^{-6}) \end{aligned}$$

Démonstration. La première ligne a été justifiée précédemment et la seconde en découle via (89) (que l'on peut intégrer pour obtenir le développement de $\log\Gamma(1+x)$). $\square$

Voici quelques données numériques. Si l'on évalue en $b = 10$ la seconde ligne on obtient $\approx 23,103\,447\,618\,168\,193$ et (en utilisant [9] si l'on a accès à Mathematica™ ou le code SageMath de l'auteur [11]) on a $K(10, 0) \approx 23,103\,447\,909\,420\,542$. Pour $b = 1000$ on obtient de la deuxième ligne la valeur $\approx 6\,907,756\,101\,047\,931\,926\,874\,351\,653\,3$ tandis qu'en utilisant le code de l'auteur on trouve $K(1000, 0) \approx 6\,907,756\,101\,047\,931\,926\,874\,490\,772\,4$. Dans ce cas, la formule de la première ligne donne en fait une approximation à peu près trois fois plus éloignée de $K(1000, 0)$ et légèrement supérieure au lieu de lui être inférieure.

7. $d = 0$ ET $k \geq 1$

Soit toujours $d = 0$ mais $k \geq 1$. Cette fois-ci notre point de départ (84) se ré-écrit en :

$$(92) \quad I(b, 0, k) = b\log(b) - \frac{1}{b} \int_{[0,1]} \left(\psi(1) - \psi(1 + \frac{x}{b}) \right) (\mu_k - \mu_{k-1})(dx)$$

$$(93) \quad = b\log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\zeta(m+1)(u_{k;m} - u_{k-1;m})}{b^{m+1}}$$

$$(94) \quad = b\log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\zeta(m+1)(w_{k-1;m} - w_{k;m})}{b^{m+1}}$$

Chaque terme en valeur absolue est majoré par $\zeta(2)(m+1)^{-1}b^{-m}$ de par $0 \leq u_{k-1;m} < u_{k;m} < \frac{b}{m+1}$. Donc à $O(b^{-M})$ près pour n'importe quel M , la différence $I(b, d, k) - b\log(b)$ est une fraction rationnelle en b et compte tenu de la Proposition 3 et de $u_{k;m} - u_{k-1;m} = w_{k-1;m} - w_{k;m}$ cette fraction rationnelle est régulière en $c = b^{-1} = 0$ et même s'y annule à l'ordre $(2(k-1) + 1) + 2 = 2k + 1$, l'ordre d'annulation étant décidé par le premier terme $m = 1$ et dans ce premier terme la contribution de $w_{k-1;m}$, toutes les autres contributions s'annulant plus à l'origine en la variable c .

Pour le terme en $m = 2$ on sait que $w_{k-1;2}$ est en $O(b^{-2k})$ donc au final une contribution en $O(b^{-2k-3})$, et on en connaît les deux premiers termes, on pourrait bien sûr en calculer

plus mais on s'en contentera et cela signifie que nous pouvons déterminer les quatre premiers termes du développement de $I(b, 0, k) - b \log(b)$, qui sera de la forme $a_1 b^{-2k-1} + a_2 b^{-2k-2} + a_3 b^{-2k-3} + a_4 b^{-2k-4}$. Il faut faire attention que le terme en $m = 3$ contribuera à b^{-2k-4} .

Pour $m = 1$ on a par la Proposition 3 :

$$(95) \quad w_{k-1;1} - w_{k;1} = \frac{c^{2k-1}}{2(1-c+c^2)^k} \left(1 - \frac{c^2}{1-c+c^2} \right) = \frac{c^{2k-1}(1-c)}{2(1-c+c^2)^{k+1}}$$

Pour $m = 2$ il faut distinguer les cas $k = 1$, $k = 2$ et $k \geq 3$. Comme on ne retient que les deux premiers termes de $w_{k-1;2}$, la contribution de $w_{k;2}$ est négligeable.

$$\begin{aligned} w_{0;2} - w_{1;2} &= \frac{5}{6}c^2 + O(c^4) \\ w_{1;2} - w_{2;2} &= \frac{1}{2}c^4 + \frac{4}{3}c^5 + O(c^6) \\ (k \geq 3) \quad w_{k-1;2} - w_{k;2} &= \frac{1}{2}c^{2k} + \frac{k}{2}c^{2k+1} + O(c^{2k+2}) \end{aligned}$$

Il faut multiplier ceci par $-\zeta(3)c^3$. Le terme avec $m = 3$ contribue $+\frac{1}{2}\zeta(4)b^{-2k-4}$.

(96)

$$I(b, 0, k) = b \log(b) + \frac{\zeta(2)(1-c)c^{2k+1}}{2(1-c+c^2)^{k+1}} - \begin{matrix} \frac{5}{6}\zeta(3)c^5 & (k=1) \\ \frac{1}{2}\zeta(3)c^7 + \frac{4}{3}\zeta(3)c^8 & (k=2) \\ \frac{1}{2}\zeta(3)c^{2k+3} + \frac{1}{2}\zeta(3)kc^{2k+4} & (k \geq 3) \end{matrix} + \frac{1}{2}\zeta(4)c^{2k+4} + O(c^{2k+5})$$

On obtient alors l'énoncé suivant :

Proposition 8. *Soit $b > 1$ et $k \geq 1$. L'écart à $b \log(b)$ de la somme harmonique de Irwin $I(b, 0, k) = \sum^{(k)} \frac{1}{m}$ où les entiers ont exactement k chiffres égaux à 0 dans leur écriture en base b admet un développement asymptotique en puissances inverses de b à tous les ordres. Il faut distinguer selon que $k = 1$, $k = 2$, ou $k \geq 3$:*

$$(97) \quad I(b, 0, 1) = b \log(b) + \frac{\zeta(2)}{2b^3} + \frac{\zeta(2)}{2b^4} - \frac{3\zeta(2) + 5\zeta(3)}{6b^5} - \frac{3\zeta(2) - \zeta(4)}{2b^6} + O(b^{-7})$$

$$(98) \quad I(b, 0, 2) = b \log(b) + \frac{\zeta(2)}{2b^5} + \frac{\zeta(2)}{b^6} - \frac{\zeta(3)}{2b^7} - \frac{15\zeta(2) + 8\zeta(3) - 3\zeta(4)}{6b^8} + O(b^{-9})$$

$$(99) \quad \begin{aligned} I(b, 0, k) &= b \log(b) + \frac{\zeta(2)}{2b^{2k+1}} + \frac{k\zeta(2)}{2b^{2k+2}} + \frac{(k^2 - k - 2)\zeta(2) - 2\zeta(3)}{4b^{2k+3}} \\ &\quad + \frac{(k^3 - 3k^2 - 10k - 6)\zeta(2) - 6k\zeta(3) + 6\zeta(4)}{12b^{2k+4}} \\ &\quad + O(b^{-2k-5}) \end{aligned} \quad (k \geq 3)$$

Voici quelques résultats numériques. Soit $\delta_k(b)$ égal à $I(b, 0, k)$ moins l'approximation donnée dans la Proposition. On obtient :

k	$\delta_k(10) \cdot 10^{2k+4}$	$\delta_k(100) \cdot 100^{2k+4}$	$\delta_k(1000) \cdot 1000^{2k+4}$
1	-0,134	-0,019	-0,001 95
2	-0,497	-0,054	-0,005 40
3	-1,369	-0,137	-0,013 65
4	-2,446	-0,229	-0,022 75

8. $d > 0$ ET $k = 0$

Dorénavant $d > 0$. Supposons tout d'abord $k = 0$. Le point de départ est l'équation (87), que nous écrivons

$$(100) \quad K(b, d) = b \log(b) - b \log\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) - \psi(1) + A + B$$

avec A le terme de la deuxième ligne de (87) et B celui de la dernière ligne. Nous examinons d'abord B :

$$(101) \quad B = \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \left(\psi\left(1 + \frac{d+x}{b}\right) - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) \right) \mu_0(dx) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \psi^{(m)}\left(1 + \frac{d}{b}\right) \frac{u_{0;m}}{b^{m+1}}$$

Pour tout $m \geq 1$ ([16, 1.16 (9)] :

$$(102) \quad \frac{1}{m!} \psi^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{m+1}}$$

et donc (avec $c = b^{-1}$) :

$$(103) \quad B = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(bn+d)^{m+1}} \right) u_{0;m} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+dc)^{m+1}} \right) (cu_{0;m}) c^m$$

Il faut faire attention, si l'on regarde cette expression du point de vue des fonctions analytiques, que nous savons $cu_{0;m} < (m+1)^{-1}$, mais uniquement pour $c = b^{-1}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Donc, dans un premier temps, nous imposons que c reste de cette forme particulière.

Sauf pour $b = 2$ et $d = 1$ auquel cas les $u_{0;m}$, $m \geq 1$, sont tous nuls, la suite $(u_{0;m})$ est strictement positive et strictement décroissante de limite nulle. Il en résulte que la série exprimant B est toujours une série alternée spéciale et l'écart entre B et une somme partielle est inférieur à la valeur absolue du premier terme ignoré. On a la majoration immédiate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(bn+d)^{m+1}} < b^{-m-1} \zeta(m+1)$ et on sait que $u_{0;m} < \frac{b}{m+1}$, donc le m^e terme est majoré par $b^{-m} \zeta(m+1)/(m+1)$. Ainsi à $O(b^{-M-1})$ près, pour M quelconque, on peut approcher B (pour nos $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$) par la somme partielle avec M termes.

On sait que $u_{0;m}$ est une fraction rationnelle en c ayant un pôle simple en $c = 0$ et pas d'autre pôle dans le disque ouvert $D(0, \rho)$, $\rho^2(1+\rho) = 1$, $\rho \approx 0,755$. L'expression $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+cd)^{m+1}$ est une fonction analytique de c dans le plan complexe privé de $\{-d^{-1}, -2d^{-1}, -3d^{-1}, \dots\}$, et b^{-1} se trouve bien dans le disque ouvert $D(0, d^{-1})$. Comme $b \geq 2$, b^{-1} se trouve aussi dans le disque $D(0, \rho)$ sur lequel on sait que $cu_{0;m}$ n'a pas de pôle. On dispose donc pour chaque

terme indexé par $m \leq M$ en tout cas d'un développement en série de Taylor à $O(c^{M+1})$ près (ou plus) et donc aussi pour la somme partielle comprenant les M premiers termes de (103). Ainsi, à nouveau maintenant pour $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$:

$$(104) \quad \begin{aligned} B &= \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} c^m (cu_{0;m}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+cd)^{m+1}} + O(c^{M+1}) \\ &= \frac{1}{2} \zeta(2) c + a_2 c^2 + \cdots + a_M c^M + O(c^{M+1}) \end{aligned}$$

Par conséquent B admet comme fonction de $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, un développement asymptotique en puissances inverses de b à tous les ordres.

On peut extraire de B une partie en écrivant $u_{0;m} = \frac{b}{m+1} - w_{0;m}$. Reprenant les étapes à l'envers, ceci correspondra à l'évaluation de

$$(105) \quad \int_0^1 \left(\psi\left(1 + \frac{d+x}{b}\right) - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) \right) dx = b \log \frac{\Gamma(1 + \frac{d+1}{b})}{\Gamma(1 + \frac{d}{b})} - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right)$$

et donc

$$(106) \quad B = b \log \frac{\Gamma(1 + \frac{d+1}{b})}{\Gamma(1 + \frac{d}{b})} - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} c^{m+1} w_{0;m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+cd)^{m+1}}$$

On sait par la Proposition 3 que chaque $w_{0;m}$ pour $m \geq 2$ est $O(c^2)$ et on dispose de la formule exacte $w_{0;1} = (d + \frac{1}{2})c / (1 - c + c^2)$. Donc parmi les termes avec $m \geq 2$, seul celui avec $m = 2$ contribuera à c^5 . Ainsi, en ce qui concerne le terme avec $m = 1$, on n'aura besoin de $\sum (n+cd)^{-2}$ qu'à l'ordre $O(c^3)$ pour déterminer B à $O(c^6)$ près. Nous obtenons la formule suivante :

$$(107) \quad \begin{aligned} B &= b \log \frac{\Gamma(1 + \frac{d+1}{b})}{\Gamma(1 + \frac{d}{b})} - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) - \left(d + \frac{1}{2}\right) \frac{c^3}{1 - c + c^2} (\zeta(2) - 2d\zeta(3)c + 3d^2\zeta(4)c^2) \\ &\quad + \left(d^2 + 2d + \frac{5}{6}\right) \zeta(3) c^5 + O(c^6) \end{aligned}$$

Venons-en à la quantité $A = \int_{[0,1[} \frac{(\mu_{\infty} - \mu_0)(dx)}{d+x}$ extraite de l'équation (87) (où $\mu_{\infty}(dx) = bdx$). Pour l'analyser dans la perspective de $b \rightarrow \infty$, nous allons faire appel à l'équation (4) pour $U_0(z) = \int_{[0,1[} (z+x)^{-1} \mu_0(dx)$:

$$(108) \quad U_0(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} U_0(bz + a)$$

Définissons

$$(109) \quad U_{\infty}(z) = \int_{[0,1[} \frac{b dx}{z+x} = b \log\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

Cette fonction vérifie la relation suivante (qui est la limite pour $k \rightarrow \infty$ de (5)) :

$$(110) \quad U_{\infty}(z) = \sum_{0 \leq a < b} U_{\infty}(bz + a)$$

Ainsi

$$(111) \quad A = -\frac{1}{d} + U_\infty(bd + d) + \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} (U_\infty(bd + a) - U_0(bd + a))$$

$$(112) \quad = -\frac{1}{d} + b \log\left(1 + \frac{1}{bd + d}\right) + \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \int_{[0,1[} \frac{(\mu_\infty - \mu_0)(dx)}{bd + a + x}$$

$$(113) \quad = -\frac{1}{d} + b \log\left(1 + \frac{1}{bd + d}\right) + \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\mu_\infty(x^m) - \mu_0(x^m)}{(bd + a)^{m+1}}$$

$$(114) \quad = -\frac{1}{d} + b \log\left(1 + \frac{1}{bd + d}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} w_{0;m} \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{1}{(bd + a)^{m+1}}$$

$$(115) \quad = -\frac{1}{d} + c^{-1} \log\left(1 + \frac{c}{d(1+c)}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} c^m w_{0;m} \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{c}{(d + ca)^{m+1}}$$

On a la majoration grossière $\sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{1}{(bd+a)^{m+1}} \leq b(bd)^{-m-1} = d^{-m-1}b^{-m}$ et on sait $0 \leq w_{0;m} \leq b/(m+1)$. Donc si l'on conserve M termes de la série le reste est majoré en valeur absolue par $\sum_{m=M+1}^{\infty} d^{-m-1}b^{1-m} = d^{-M-2}b^{-M}/(1-1/(bd)) \leq 2d^{-M-2}b^{-M}$. Par conséquent on peut à $O(b^{-M})$ près, pour chaque M donné, se contenter de regarder ce qu'il se passe avec la somme partielle avec M termes. Et donc il suffit d'examiner chaque expression

$$(116) \quad s_m(b, d) = \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{c}{(d + ca)^{m+1}} = s_m^*(b, d) - c(d + cd)^{-m-1}$$

puisque nous savons déjà que les $c^m w_{0;m}$ sont analytiques (et s'annulent à l'origine à l'ordre 2 pour $m = 1$, à l'ordre $m + 2$ pour $m \geq 2$). Il est bien connu que la somme de Riemann

$$(117) \quad s_m^*(b, d) = \frac{1}{b} \sum_{0 \leq a < b} \frac{1}{(d + \frac{a}{b})^{m+1}} \approx \int_d^{d+1} \frac{dx}{x^{m+1}}$$

admet par la méthode d'Euler-MacLaurin ([15, §3.6], [32, §8.1]) un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b : d'une manière générale, pour toute fonction f de classe C^∞ sur $[0, 1]$ on a le développement asymptotique pour $b \rightarrow \infty$:

$$(118) \quad \frac{1}{b} \sum_{a=0}^{b-1} f\left(\frac{a}{b}\right) =_{\text{asympt.}} \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(1) - f(0)}{2b} + \sum_{i \geq 1} \frac{B_{2i}}{(2i)! b^{2i}} (f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0))$$

que l'on peut appliquer ici aux fonctions $f(x) = (d + x)^{-m-1}$. Il existe donc également un développement pour $s_m(b, d)$, puis de chaque somme partielle de la série dans A , et nous concluons que A comme fonction de $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, admet un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b .

Plus tard, nous aurons besoin du développement de $s_1(b, d)$ jusqu'au terme c^3 , le voici :

$$(119) \quad \begin{aligned} s_1(b, d) &= \frac{1}{d(d+1)} + \frac{c}{2}(d^{-2} - (d+1)^{-2}) + \frac{c^2}{6}(d^{-3} - (d+1)^{-3}) - \frac{c}{d^2(1+c)^2} + O(c^4) \\ &= \frac{1}{d(d+1)} - \frac{1}{2}(d^{-2} + (d+1)^{-2})c + \frac{1}{6}(d^{-3} - (d+1)^{-3} + 12d^{-2})c^2 - 3d^{-2}c^3 + O(c^4) \end{aligned}$$

Nous aurons également besoin de deux termes de $s_2(b, d)$:

$$(120) \quad \begin{aligned} s_2(b, d) &= \frac{1}{2}(d^{-2} - (d+1)^{-2}) + \frac{c}{2}(d^{-3} - (d+1)^{-3}) - \frac{c}{d^3(1+c)^3} + O(c^2) \\ &= \frac{1}{2}(d^{-2} - (d+1)^{-2}) - \frac{c}{2}(d^{-3} + (d+1)^{-3}) + O(c^2) \end{aligned}$$

et de

$$(121) \quad s_3(b, d) = \frac{1}{3}(d^{-3} - (d+1)^{-3}) + O(c)$$

Dans chaque troncation de A à une somme partielle, chaque terme avec $m \geq 2$ contribue un terme principal d'ordre c^{m+2} . Pour obtenir un résultat à $O(c^6)$ près nous devons conserver les termes avec $m = 1, m = 2, m = 3$. Et nous n'avons besoin que des deux termes principaux de $w_{0,2}$ et du terme principal de $w_{0,3}$, que nous avons déjà tabulés dans la Proposition 3.

À ce stade nous avons donc établi que $K(b, d) - b \log(b) + b \log(1 + \frac{1}{d})$ admet à d fixé un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b pour $b \rightarrow \infty$. Et en rassemblant nos résultats, nous obtenons (avec $c = b^{-1}$) :

$$(122) \quad \begin{aligned} K(b, d) &= b \log(b) - b \log(1 + \frac{1}{d}) \\ &\quad + b \log \frac{\Gamma(1 + \frac{d+1}{b})}{\Gamma(1 + \frac{d}{b})} - \psi(1) \\ &\quad - (d + \frac{1}{2}) \frac{c^3}{1 - c + c^2} \left(\zeta(2) - 2d\zeta(3)c + 3d^2\zeta(4)c^2 \right) + (d^2 + 2d + \frac{5}{6})\zeta(3)c^5 \\ &\quad - \frac{1}{d} + c^{-1} \log(1 + \frac{c}{d(1+c)}) - (d + \frac{1}{2}) \frac{c^2}{1 - c + c^2} \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{c}{(d+ac)^2} \\ &\quad + (d^2 + 2d + \frac{5}{6})c^4 \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{c}{(d+ca)^3} - (d + \frac{1}{2})c^5 \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{c}{(d+ca)^4} \\ &\quad + O(c^6) \end{aligned}$$

Avec l'aide de Maple™ appliqué à la formule ci-dessus où on a remplacé les sommes finies de puissances inverses $s_1(b, d)$, $s_2(b, d)$ et $s_3(b, d)$ par leurs développements de Euler-MacLaurin donnés précédemment, nous avons obtenu explicitement les cinq premiers coefficients :

Proposition 9. *Soit $d > 0$ et $b > d$ deux entiers. La somme harmonique de Kempner $K(b, d) = \sum' m^{-1}$ où les dénominateurs sont les entiers naturels non nuls n'ayant pas le chiffre d en base b est telle que $K(b, d) - (b \log(b) - b \log(1 + d^{-1}))$ possède pour $b \rightarrow \infty$ à d*

fixé un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b . Le début de ce développement est :

$$I(b, d, 0) = b \log(b) - b \log\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \frac{a_1(d)}{b} + \frac{a_2(d)}{b^2} + \frac{a_3(d)}{b^3} + \frac{a_4(d)}{b^4} + \frac{a_5(d)}{b^5} + O(b^{-6})$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1(d) &= \left(d + \frac{1}{2}\right)(\zeta(2) - d^{-2}) \\ a_2(d) &= -(d^2 + d + \frac{1}{3})\zeta(3) + \frac{9d^2 + 8d + 2}{6d^3(d+1)} \\ a_3(d) &= \left(d + \frac{1}{2}\right)(d^2 + d + \frac{1}{2})\zeta(4) - \left(d + \frac{1}{2}\right)\zeta(2) - \left(d + \frac{1}{2}\right)\frac{2d^4 + 6d^3 + 6d^2 + 4d + 1}{2d^4(d+1)^2} \\ a_4(d) &= -(d^4 + 2d^3 + 2d^2 + d + \frac{1}{5})\zeta(5) + (2d+1)d\zeta(3) - \left(d + \frac{1}{2}\right)\zeta(2) \\ &\quad + \frac{60d^7 + 240d^6 + 500d^5 + 705d^4 + 627d^3 + 331d^2 + 96d + 12}{60d^5(d+1)^3} \\ a_5(d) &= \left(d + \frac{1}{2}\right)(d^2 + d + 1)(d^2 + d + \frac{1}{3})\zeta(6) - 3\left(d + \frac{1}{2}\right)d^2\zeta(4) + (3d^2 + 3d + \frac{5}{6})\zeta(3) \\ &\quad - \left(d + \frac{1}{2}\right)\frac{9d^6 + 38d^5 + 56d^4 + 44d^3 + 22d^2 + 7d + 1}{3d^6(d+1)^3} \end{aligned}$$

Remarque 10. Si l'on substitue $d = 0$ dans les facteurs multipliant les $\zeta(n)$ on retrouve exactement la proposition 7 décrivant le comportement de $K(b, 0)$. Mais ici il y a dans chaque coefficient une fraction rationnelle supplémentaire en d qui a un pôle en $d = 0$ (et de plus la série décrit l'écart de $K(b, d)$ à $b \log(b) - b \log(1 + d^{-1})$, pas à $b \log(b)$).

En ce qui concerne la vérification numérique, soit $\delta_5(b, d)$ l'écart entre $K(b, d)$ et la valeur donnée dans la proposition jusqu'au terme en b^{-5} inclus. Nous avons cherché à vérifier que $\delta_5(b, d) \cdot b^5$ se comportait bien comme un multiple de b^{-1} . Ceci semble valable. Dans les données qui suivent on voit que lorsque d est même encore modérément petit les coefficients peuvent être grands, donc ce n'est pas leur magnitude absolue qui nous intéresse mais le comportement lorsque l'on multiplie b par 10 ou par 2.

(b, d)	$(10, 1)$	$(100, 1)$	$(1000, 1)$	$(10, 2)$	$(100, 2)$	$(1000, 2)$
$b^5 \delta_5(b, d)$	-0,009 5	0,003 36	0,000 375	-22,984	-2,890 7	-0,296 7
(b, d)	$(10, 3)$	$(100, 3)$	$(1000, 3)$	$(10, 9)$	$(100, 9)$	$(1000, 9)$
$b^5 \delta_5(b, d)$	-138,36	-18,364	-1,898 6	-37 410,9	-6 651,1	-721,35
(b, d)	$(100, 20)$	$(1000, 20)$	$(100, 10)$	$(200, 10)$	$(400, 10)$	$(800, 10)$
$b^5 \delta_5(b, d)$	-618 258,2	-72 949,1	-12 042,9	-6 321,0	-3 241,1	-1 641,5

Pour donner un exemple avec des valeurs numériques absolues voici le tableau des $a_i(1)$:

i	$a_i(1)$
1	0,967 401 100 272 339 654 708 622 749 969 038
2	-1,221 466 107 372 386 665 932 722 376 860 050
3	-1,971 188 973 855 571 436 523 608 887 939 658
4	0,066 067 527 317 549 658 236 125 718 531 700
5	2,963 203 104 060 488 388 745 299 065 364 318

et celui des approximations successives de $I(1000, 1, 0)$:

$b \log(b) - b \log(1 + \frac{1}{d})$	6 802,394 763 324 310 750 826 473 383 213 779 8
$+a_1/b$	6 802,410 272 913 995 191 693 669 253 873 912 3
$+a_2/b^2$	6 802,410 164 346 546 754 882 380 991 739 997 6
$+a_3/b^3$	6 802,410 165 261 316 828 374 537 305 718 148 6
$+a_4/b^4$	6 802,410 165 253 014 234 306 883 240 656 267 7
$+a_5/b^5$	6 802,410 165 253 091 508 817 811 086 298 570 9
$I(1000, 1, 0)$	6 802,410 165 253 090 787 463 765 128 313 543

De même voici le tableau des coefficients $a_i(9)$ (on a arrondi pour qu'ils aient tous le même nombre de chiffres après la virgule) :

i	$a_i(9)$
1	15,509 589 684 440 867 195 870 660 132 520
2	-108,567 448 436 811 288 262 133 914 700 522
3	914,770 073 492 156 313 978 150 997 011 578
4	-8 302,594 067 654 065 061 880 891 954 936 008
5	77 274,510 927 845 642 303 169 206 910 055 693

et celui des approximations successives de $I(1000, 9, 0)$

$b \log(b) - b \log(1 + \frac{1}{d})$	6 802,394 763 324 310 750 826 473 383 213 779 8
$+a_1/b$	6 802,410 272 913 995 191 693 669 253 873 912 3
$+a_2/b^2$	6 802,410 164 346 546 754 882 380 991 739 997 6
$+a_3/b^3$	6 802,410 165 261 316 828 374 537 305 718 148 6
$+a_4/b^4$	6 802,410 165 253 014 234 306 883 240 656 267 7
$+a_5/b^5$	6 802,410 165 253 091 508 817 811 086 298 570 9
$I(1000, 9, 0)$	6 802,410 165 253 090 787 463 765 128 313 543

Dans l'ensemble ces résultats numériques semblent donc relativement cohérents.

9. $d > 0$ ET $k > 0$

Toujours avec $d > 0$ on considère maintenant $k \geq 1$. Montrons tout d'abord l'existence du développement asymptotique. Le point de départ est l'équation (86). On suit le déroulé déjà

exposé pour $k = 0$.

$$(123) \quad B = \frac{1}{b} \int_{[0,1[} \left(\psi\left(1 + \frac{d+x}{b}\right) - \psi\left(1 + \frac{d}{b}\right) \right) (\mu_k - \mu_{k-1})(dx)$$

$$(124) \quad = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(bn+d)^{m+1}} \right) (u_{k;m} - u_{k-1;m})$$

$$(125) \quad = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+dc)^{m+1}} \right) (w_{k-1;m} - w_{k;m}) c^{m+1}$$

En utilisant la majoration $0 \leq cw_{k-1;m} - cw_{k;m} \leq (m+1)^{-1}$ connue pour $c = b^{-1}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ on a alors par exactement les mêmes arguments que ceux utilisés dans la section précédente, la preuve de l'existence d'un développement asymptotique en puissances de c , pour c de la forme donnée et tendant vers zéro.

Venons-en maintenant à l'autre partie, plus délicate au vu des informations utilisables sur les moments, de l'équation (86). À nouveau nous suivons les arguments exposés pour $d > 0$ et $k = 0$ qui font appel à la propriété (5) des fonctions $U_k(z)$ (et (4) doit aussi être utilisé si $k = 1$ pour $U_{k-1} = U_0$).

$$(126) \quad A = \int_{[0,1[} \frac{(\mu_{k-1} - \mu_k)(dx)}{d+x} = U_{k-1}(d) - U_k(d)$$

$$(127) \quad = \delta_{k=1} \frac{1}{d} + \delta_{k>1} U_{k-2}(bd+d) - U_{k-1}(bd+d) + \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} (U_{k-1}(bd+a) - U_k(bd+a))$$

$$(128) \quad = \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{u_{k;m} - u_{k-1;m}}{(bd+a)^{m+1}} + \delta_{k>1} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{u_{k-1;m} - u_{k-2;m}}{(bd+d)^{m+1}} \\ + \delta_{k=1} \left(\frac{1}{bd+d} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{u_{0;m}}{(bd+d)^{m+1}} \right)$$

On a débuté les séries à $m = 1$ car $u_{0;m} = b$ pour tout m . Enregistrons les expressions obtenues pour A et B dans l'expression suivante qui peut être utilisée pour le calcul numérique :

Proposition 11. *Soit $0 < d < b$ et $k \geq 1$. Alors $I(b, d, k)$ vaut :*

$$(129) \quad b \log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (u_{k;m} - u_{k-1;m}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(bn+d)^{m+1}} + \sum_{\substack{0 \leq a < b \\ a \neq d}} \frac{1}{(bd+a)^{m+1}} \right) \\ + \delta_{k>1} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{u_{k-1;m} - u_{k-2;m}}{(bd+d)^{m+1}} + \delta_{k=1} \left(\frac{1}{bd+d} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{u_{0;m}}{(bd+d)^{m+1}} \right)$$

Dans cette proposition le B correspond à la partie des coefficients de la première série qui est donnée par une série en $n \geq 1$. Nous avons déjà expliqué que cela donnait une contribution totale admettant un développement asymptotique.

Le terme le plus complexe dans l'équation précédente est celui venant des sommes finies de puissances inverses sur les nombres de la forme $bd+a$, $a \neq d$. Mais nous avons déjà rencontré

une série analogue dans la section précédente avec $w_{0;m}$ à la place de $u_{k;m} - u_{k-1;m}$ et les explications données fonctionnent à l'identique.

Lorsque $k > 1$ la deuxième ligne donne une contribution du même type que B , mais plus simple. On indiquera simplement qu'il est important que le dénominateur ne soit pas d^{m+1} par exemple mais bien $(bd + d)^{m+1}$ sinon il nous faudrait des renseignements plus précis sur les moments, d'une manière contrôlée pour $m \rightarrow \infty$.

Lorsque $k = 1$ la série de la deuxième ligne avec les coefficients $u_{0;m}$ s'analyse à nouveau facilement en invoquant la majoration par $b/(m+1)$: ici encore pour M quelconque un nombre fini de termes suffit pour comprendre la somme à $O(b^{-M})$ près. Et on est alors réduit à une expression rationnelle en $c = b^{-1}$, régulière à l'origine.

Nous avons donc établi que $I(b, d, k) - b \log(b)$ admet pour $b \rightarrow \infty$ un développement asymptotique en puissances inverses de b et il nous reste à en donner les quelques premiers termes. Au vu de la Proposition 8 on s'attend à devoir distinguer $k = 1$, $k = 2$, et $k \geq 3$.

Considérons tout d'abord $k = 1$. On a alors, avec $c = b^{-1}$ et les notations de la section précédente :

$$\begin{aligned}
 (130) \quad I(b, d, 1) &= b \log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (w_{0;m} - w_{1;m}) c^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(n + cd)^{m+1}} + s_m(b, d) \right) \\
 &\quad + \frac{c}{d + dc} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(cu_{0;m})c^m}{(1 + c)^{m+1} d^{m+1}} \\
 (131) \quad &= b \log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (w_{0;m} - w_{1;m}) c^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(n + cd)^{m+1}} + s_m(b, d) \right) \\
 &\quad + \frac{c}{d(1 + c)} + c^{-1} \left(\frac{c}{d(1 + c)} - \log\left(1 + \frac{c}{d(1 + c)}\right) \right) \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{w_{0;m} c^{m+1}}{(1 + c)^{m+1} d^{m+1}}
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà tabulé le début des développements en puissance de c des sommes de Riemann $s_1(b, d)$, $s_2(b, d)$, $s_3(b, d)$ qui ont chacune une limite finie en $c = 0$. Rappelons de la Proposition 3 que (nota bene : tous les $O()$ dépendent de d et de m) :

$$(132) \quad w_{0;1} - w_{1;1} = \left(d + \frac{1}{2}\right) \frac{c(1 - c)}{(1 - c + c^2)^2}$$

$$(133) \quad w_{0;2} - w_{1;2} = \left(d^2 + 2d + \frac{5}{6}\right) c^2 + O(c^4)$$

$$(134) \quad w_{0;3} - w_{1;3} = \left(d + \frac{1}{2}\right) c^2 + \left(d + \frac{1}{2}\right) d(d + 1) c^3 + O(c^4)$$

$$(135) \quad w_{0;m} - w_{1;m} = \left(d + \frac{1}{2}\right) c^2 - \left(d + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{m}{2} - 1\right) c^3 + O(c^4) \quad (m \geq 4)$$

$$(136) \quad w_{0;1} = \left(d + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{1 - c + c^2}$$

$$(137) \quad w_{0;2} = \left(d^2 + 2d + \frac{5}{6}\right) c^2 + O(c^4)$$

$$(138) \quad w_{0;m} = O(c^2) \quad (m \geq 3)$$

$$(139) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(n+cd)^2} = \zeta(2)c - 2d\zeta(3)c^2 + 3d^2\zeta(4)c^3 + O(c^4)$$

La première somme dans (131) va donner une contribution d'ordre c^2 (plus précisément : équivalente à $(d + \frac{1}{2})(d(d+1))^{-1}c^2$). Le terme principal contribué par la deuxième somme est aussi donné par $m = 1$ et est $\frac{c}{2}d^{-2}$. Compte tenu de $c/(d+dc)$ on a donc

$$(140) \quad I(b, d, 1) = b \log(b) + \frac{d + \frac{1}{2}}{d^2} b^{-1} + O_d(b^{-2})$$

Nous nous étions habitués aux $\zeta(n)$ et là il n'y en a pas à cet ordre là... Voici quelques données numériques obtenues avec le code Python de l'auteur [11] (sa précision suffit ici mais pour étudier l'approximation à un plus grand ordre, il faut pour $b = 1000$ utiliser l'implémentation en SageMath).

	1	2	3	4	5
10	0,921 1	0,998 6	1,068 7	1,142 8	1,221 7
100	0,989 7	0,994 7	0,997 2	0,999 2	1,001 2
1000	0,998 9	0,999 4	0,999 6	0,999 7	0,999 8

À l'intersection de la ligne b et de la colonne d , on a affiché la valeur arrondie de $(I(b, d, 1) - b \log(b))bd^2/(d + \frac{1}{2})$.

Nous avons donné précédemment quatre termes de $s_1(b, d)$, deux termes de $s_2(b, d)$ et le terme principal de $s_3(b, d)$ ((119), (120), (121)). Combinés aux développements en série donnés plus hauts nous pouvons obtenir sans trop de peine un résultat à $O(c^6)$ près. Le voici :

Proposition 12. *Soit $d > 0$ et $b > d$ deux entiers. La somme harmonique de Irwin $I(b, d, 1) = \sum^{(1)} m^{-1}$ où les dénominateurs sont les entiers naturels ayant exactement une fois le chiffre d en base b est telle que $I(b, d, 1) - b \log(b)$ possède pour $b \rightarrow \infty$ à d fixé un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b . Le début de ce développement est :*

$$I(b, d, 1) = b \log(b) + \frac{a_1(d)}{b} + \frac{a_2(d)}{b^2} + \frac{a_3(d)}{b^3} + \frac{a_4(d)}{b^4} + \frac{a_5(d)}{b^5} + O(b^{-6})$$

avec :

$$a_1(d) = (d + \frac{1}{2})d^{-2}$$

$$a_2(d) = -\frac{9d^2 + 8d + 2}{6d^3(d+1)}$$

$$a_3(d) = (d + \frac{1}{2})\zeta(2) + (d + \frac{1}{2})\frac{2d^3 + 4d^2 + 4d + 1}{2d^4(d+1)^2}$$

$$a_4(d) = -(2d+1)d\zeta(3) + (d + \frac{1}{2})\zeta(2) - \frac{60d^7 + 180d^6 + 350d^5 + 585d^4 + 597d^3 + 331d^2 + 96d + 12}{60d^5(d+1)^3}$$

$$a_5(d) = +3(d + \frac{1}{2})d^2\zeta(4) - (3d^2 + 3d + \frac{5}{6})\zeta(3) - (d + \frac{1}{2})\zeta(2) \\ - \frac{12d^8 - 24d^7 - 216d^6 - 387d^5 - 339d^4 - 186d^3 - 72d^2 - 18d - 2}{12d^6(d+1)^3}$$

À titre d'examen de la validité numérique notons $\delta_5(b, d)$ l'écart entre la valeur de $I(b, d, 1)$ calculée sur la base du code **SageMath** de [11] et l'approximation donnée par le développement asymptotique jusqu'à l'ordre $O(b^{-5})$ inclus. La table qui suit donne les valeurs de $b^6\delta_5(b, d)$ pour $d \in \{1, 2, \dots, 8\}$ et $b \in \{125, 250, 500, 1000\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
125	-29.89	2.04	-125.04	-596.91	-1710.36	-3846.98	-7468.02	-13110.55
250	-30.15	2.32	-125.75	-605.27	-1744.25	-3943.24	-7691.90	-13566.66
500	-30.28	2.47	-126.09	-609.52	-1761.67	-3993.12	-7808.76	-13806.41
1000	-30.34	2.55	-126.27	-611.67	-1770.50	-4018.52	-7868.48	-13929.37

Voici maintenant les $b^5\delta_4(b, d)$ et la dernière ligne est celle des coefficients $a_5(d)$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
125	6.78	7.35	51.71	148.64	314.59	565.86	918.21	1386.80	1986.25	2730.59
250	6.90	7.34	52.21	150.99	321.30	580.87	947.19	1437.42	2068.40	2856.64
500	6.96	7.34	52.46	152.20	324.75	588.65	962.34	1464.08	2111.97	2923.93
1000	6.99	7.33	52.58	152.80	326.50	592.62	970.09	1477.76	2134.41	2958.72
	7.02	7.33	52.71	153.42	328.27	596.64	977.95	1491.69	2157.32	2994.32

Il est amusant de constater que le chiffre 2 semble avoir un $a_6(2)$ nettement plus petit que les autres, et d'ailleurs on voit que $b^5\delta_4(b, 2)$ converge nettement plus vite vers sa limite $a_5(2)$ que ce que l'on constate pour $d \neq 2$. Tout cela semble cohérent puisque les lignes ci-dessus sont approximativement $a_5(d) + a_6(d)/b$.

Passons à $k \geq 2$. Exprimée avec $c = b^{-1}$ et les $w_{k;m} = \frac{b}{m+1} - u_{k;m}$, la formule de la proposition 11 donne :

$$(141) \quad I(b, d, 1) = b \log(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (w_{k-1;m} - w_{k;m}) c^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(n+cd)^{m+1}} + s_m(b, d) \right) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (w_{k-2;m} - w_{k-1;m}) \frac{c^{m+1}}{d^{m+1}(1+c)^{m+1}}$$

Le terme avec $m = 1$ de la première somme va contribuer par (95) un $c^{2k-1+1} = c^{2k}$. Tandis que celui avec $m = 1$ de la deuxième somme contribue pour la même raison un $c^{2k-3+2} = c^{2k-1}$. Donc le premier terme du développement sera en c^{2k-1} (de même que pour $k = 1$ il était en b^{-1}). Si nous voulons donner cinq coefficients il faut aller jusqu'à c^{2k+3} et donc travailler à $O(c^{2k+4})$ près. Dans la première somme le terme indicé par $m \geq 2$ contribue un c^{2k+m} on conserve donc $m = 2$ et $m = 3$. Dans la deuxième somme le terme indicé par $m \geq 2$ contribue un c^{2k-1+m} il faut donc prendre un compte en sus de $m = 1, m = 2, 3, 4$. On connaît déjà les

deux premiers termes de $w_{k-2;2} - w_{k-1;2}$, mais il nous en faut trois, donc il nous faut les trois premiers termes de $w_{k-2;2}$.

Commençons par $k = 2$, donc il nous faut $w_{0;2}$. La relation de récurrence (23) donne ici

$$(142) \quad (1 - c^2 + c^3)w_{0;2} = 2(c^2\gamma_1)cw_{0;1} + ((d+1)^3 - d^3)\frac{c^2}{3}$$

avec $c^2\gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - dc^2$ et $w_{0;1} = (d + \frac{1}{2})c/(1 - c + c^2)$. On obtient

$$(143) \quad w_{0;2} = (d^2 + 2d + \frac{5}{6})c^2 - (d^2 - \frac{1}{3})c^4 + O(c^5)$$

Pour $w_{1;2}$, la récurrence est (38) :

$$(144) \quad (1 - c^2 + c^3)w_{1;2} = 2c(c^2\gamma_1)w_{1;1} + c^3(w_{0;2} + 2dw_{0;1})$$

avec $w_{1;1} = (d + \frac{1}{2})c^3/(1 - c + c^2)^2$, et on voit que pour obtenir les trois premiers termes de $w_{1;2}$ on n'a besoin dans cette récurrence que des deux premiers (dont un est nul) de $w_{0;2}$. On obtient :

$$(145) \quad w_{1;2} = \frac{1}{2}(2d+1)^2c^4 + (3d^2 + 4d + \frac{4}{3})c^5 + 0 \cdot c^6 + O(c^7)$$

qui est la formule de la Proposition 3 mais on voit que le $O(c^6)$ était un $O(c^7)$.

La récurrence pour $w_{2;2}$, dont on sait déjà qu'il est d'ordre c^6 , est

$$(146) \quad (1 - c^2 + c^3)w_{2;2} = 2c(c^2\gamma_1)w_{2;1} + c^3(w_{1;2} + 2dw_{1;1})$$

Il faut l'évaluer à $O(c^9)$ près et donc on n'y a besoin que des deux premiers termes de $w_{1;2}$ mais il faut les trois premiers termes de $w_{1;1}$. Quant à $w_{2;1}$, c'est $(d + \frac{1}{2})c^5/(1 - c + c^2)^3$ et il nous faut aussi ses trois premiers termes. Pour déterminer le troisième terme de $w_{j;2}$ on n'aura pas besoin de faire une récurrence il est déterminé par les deux premiers que l'on connaît déjà par la Proposition 3. Pour $w_{j;2}$ avec $j = 2$ on obtient :

$$(147) \quad w_{2;2} = \frac{1}{2}(2d+1)^2c^6 + \frac{3}{2}(2d+1)^2c^7 + (5d^2 + 6d + \frac{11}{6})c^8 + O(c^9)$$

Pour $j \geq 3$, si l'on pose

$$(148) \quad w_{j;2} = \frac{1}{2}(2d+1)^2c^{2j+2} + \frac{j+1}{2}(2d+1)^2c^{2j+3} + \alpha_j c^{2j+4} + O(c^{2j+5})$$

alors la relation déterminant α_j provient de

$$(149) \quad (1 - c^2 + c^3)w_{j;2} = 2c(c^2\gamma_1)w_{j;1} + c^3(w_{j-1;2} + 2dw_{j-1;1})$$

avec $w_{j;1} = (d + \frac{1}{2})c^{2j+1}/(1 - c + c^2)^{j+1}$, et en n'utilisant que les deux premiers termes de $w_{j-1;2}$ qui sont connus (et indiqués plus haut pour j). On obtient après calcul :

$$(150) \quad w_{j;2} = \frac{1}{2}(2d+1)^2c^{2j+2} \left(1 + (j+1)c + \frac{j(j+1)}{2}c^2 + O(c^3) \right) \quad (j \geq 3)$$

Si l'on revient à notre $k \geq 2$, on a besoin de $w_{j;2}$ avec $j = k - 2$. Mais cela signifie que chacun de $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$, aura un comportement particulier et (a priori) une forme

commune n'apparaîtra en ce qui concerne le coefficient de b^{-2k-3} qu'à partir de $k = 5$. Comme la valeur exacte de ce cinquième coefficient ne semble pas revêtir une grande importance, et malgré le temps qui a été ici consacré à déterminer les $w_{j;2}$ avec trois termes, nous n'allons utiliser cette information que pour $k = 2$ (donc $w_{0;2}$). Pour $k \geq 3$ nous ne donnerons que les quatre premiers coefficients du développement asymptotique.

Voici le résultat pour $k = 2$:

Proposition 13. *Soit $d > 0$ et $b > d$ deux entiers. La somme harmonique de Irwin $I(b, d, 2) = \sum^{(2)} m^{-1}$ où les dénominateurs sont les entiers naturels ayant exactement deux fois le chiffre d en base b est telle que $I(b, d, 2) - b \log(b)$ possède pour $b \rightarrow \infty$ à d fixé un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b . Le début de ce développement est :*

$$I(b, d, 2) = b \log(b) + \frac{a_1(d)}{b^3} + \frac{a_2(d)}{b^4} + \frac{a_3(d)}{b^5} + \frac{a_4(d)}{b^6} + \frac{a_5(d)}{b^7} + O(b^{-8})$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1(d) &= (d + \frac{1}{2})d^{-2} \\ a_2(d) &= -\frac{d + \frac{1}{2}}{d^2(d+1)} \\ a_3(d) &= (d + \frac{1}{2})\zeta(2) - \frac{30d^3 + 70d^2 + 47d + 10}{12d^3(d+1)^2} \\ a_4(d) &= -(2d+1)d\zeta(3) + (2d+1)\zeta(2) \\ &\quad - \frac{12d^6 - 60d^5 - 258d^4 - 342d^3 - 212d^2 - 61d - 6}{12d^4(d+1)^3} \\ a_5(d) &= +3(d + \frac{1}{2})d^2\zeta(4) - (d + \frac{1}{2})(6d+1)\zeta(3) \\ &\quad - \frac{60d^7 + 240d^6 + 440d^5 + 561d^4 + 465d^3 + 219d^2 + 54d + 6}{12d^5(d+1)^3} \end{aligned}$$

Supposons maintenant $k \geq 3$. Le premier terme du développement sera en c^{2k-1} . Si l'on veut un résultat à $O(c^{2k+3})$ près, donc avec quatre termes, il suffit dans la première somme d'utiliser $m = 1$ et $m = 2$ et dans la seconde les $m = 1, 2, 3$. On aura besoin pour la première somme des $w_{j;1}$, que l'on connaît exactement, pour $j = k, k-1$, et seulement du terme dominant de $w_{k-1;2}$ qui est toujours $2(d + \frac{1}{2})c^{2k}$ puisque $k > 1$. Pour la deuxième somme et $m = 2$ on a besoin des deux termes dominants de $w_{k-2;2}$, et donc il faut distinguer $k = 3$ de $k > 3$ d'après la Proposition 3 en ce qui concerne le deuxième coefficient qui au final contribuera à c^{2k+2} (donc à c^8 pour $k = 3$). Pour $m = 3$ on n'a besoin que du terme dominant de $w_{k-2;3}$ qui est toujours $(d + \frac{1}{2})c^{2k-2}$. Donc finalement pour $k = 3$ il y aura juste une petite correction à faire pour le dernier coefficient du développement asymptotique par rapport à la formule générale valable pour $k \geq 3$. Voici donc la dernière proposition de cet article.

Proposition 14. *Soit $d > 0$ et $b > d$ deux entiers. Soit $k \geq 3$. La somme harmonique de Irwin $I(b, d, k) = \sum^{(k)} m^{-1}$ où les dénominateurs sont les entiers naturels ayant exactement*

k fois le chiffre d en base b est telle que $I(b, d, k) - b \log(b)$ possède pour $b \rightarrow \infty$ à d (et k) fixé un développement asymptotique à tous les ordres en puissances inverses de b . Le début de ce développement est :

$$I(b, d, k) = b \log(b) + \frac{a_1(d)}{b^{2k-1}} + \frac{a_2(d)}{b^{2k}} + \frac{a_3(d)}{b^{2k+1}} + \frac{a_4(d)}{b^{2k+2}} + O(b^{-2k-3})$$

avec, pour $k \geq 4$:

$$a_1(d) = (d + \frac{1}{2})d^{-2}$$

$$a_2(d) = \frac{(d + \frac{1}{2})((k-2)d + k - 3)}{d^2(d+1)}$$

$$a_3(d) = (d + \frac{1}{2})\zeta(2) + (d + \frac{1}{2}) \frac{(k^2 - 5k + 4)d^3 + (2k^2 - 12k + 8)d^2 + (k^2 - 7k + 1)d - 2}{2d^3(d+1)^2}$$

$$a_4(d) = (d + \frac{1}{2}) \left(-2d\zeta(3) + k\zeta(2) + \left\{ \begin{aligned} &(k^3 - 9k^2 + 14k)d^5 + (3k^3 - 30k^2 + 45k + 42)d^4 \\ &\quad + (3k^3 - 33k^2 + 39k + 114)d^3 \\ &\quad + (k^3 - 12k^2 + 2k + 108)d^2 + (-6k + 43)d + 6 \end{aligned} \right\} + \frac{6d^4(d+1)^3}{6d^4(d+1)^3} \right)$$

Pour $k = 3$ les formules sont valables sauf pour $a_4(d)$. Il faut lui ajouter $(d^2 - \frac{1}{3})/d^3$.

$$a_4(d, k=3) = -(2d+1)d\zeta(3) + 3(d + \frac{1}{2})\zeta(2) - \frac{12d^6 - 50d^4 - 81d^3 - 71d^2 - 33d - 6}{12d^4(d+1)^3}$$

Voici quelques constats numériques pour $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ et $k = 5$. Nous avons évalué pour $b = 25, 125, 250, 500, 1000$, et pour $d \in \{1, \dots, 10\}$ (nous n'en montrons qu'une partie pour respecter les dimensions de la page) les valeurs de $I(b, d, k)$ en utilisant le code **SageMath** de l'auteur [11] et nous multiplions leurs écarts aux approximations par la puissance de b correspondant au premier terme omis. Pour $k = 5$ cela signifie que nous multiplions par b^{13} donc si $b = 1000$ par 10^{39} . Nous avons fait ces calculs avec 68 chiffres décimaux de précision (avant la soustraction pour l'écart) ce qui est excessif mais qui peut le plus peut le moins.

Pour ce premier tableau $k = 2$ et nous avons utilisé les cinq termes (de b^{-3} à b^{-7}) donnés par la Proposition 13. L'écart est donc multiplié par b^8 .

$(k = 2)$	$d = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$b = 25$	36.74	22.18	-24.62	-284.46	-969.22	-2335.30	-4675.99	-8314.67
125	40.65	24.71	-21.32	-305.32	-1094.98	-2741.15	-5675.32	-10406.06
250	41.19	25.07	-20.76	-307.96	-1112.67	-2801.26	-5829.43	-10740.42
500	41.46	25.25	-20.47	-309.27	-1121.70	-2832.23	-5909.50	-10915.42
1000	41.60	25.35	-20.32	-309.93	-1126.26	-2847.95	-5950.31	-11004.97

Pour les trois tableaux suivants nous avons utilisé les quatre termes de b^{-2k+1} à b^{-2k-2} tels que donnés par la Proposition 14.

Écart multiplié par b^9 :

$(k = 3)$	$d = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$b = 25$	-9.48	-11.82	6.47	60.13	160.66	317.67	539.24	832.18	1202.30
125	-9.46	-11.86	7.14	67.04	185.29	378.69	663.43	1055.04	1568.46
250	-9.47	-11.88	7.22	67.98	188.83	387.86	682.80	1091.05	1629.64
500	-9.48	-11.88	7.25	68.45	190.64	392.59	692.89	1109.95	1661.96
1000	-9.48	-11.89	7.27	68.69	191.56	395.00	698.04	1119.62	1678.58

Écart multiplié par b^{11} :

$(k = 4)$	$d = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$b = 25$	-8.00	-13.06	-2.08	40.72	127.40	267.98	470.89	743.21	1090.97
125	-8.02	-12.68	-1.46	45.97	147.34	319.64	579.16	941.59	1422.00
250	-8.03	-12.64	-1.39	46.67	150.19	327.36	596.01	973.59	1477.21
500	-8.04	-12.62	-1.36	47.02	151.65	331.35	604.78	990.36	1506.37
1000	-8.05	-12.61	-1.35	47.20	152.38	333.38	609.25	998.96	1521.36

Écart multiplié par b^{13} :

$(k = 5)$	$d = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$b = 25$	-11.06	-13.73	-7.47	26.28	100.56	225.95	411.26	663.90	990.17
125	-10.73	-12.79	-6.59	30.51	116.86	269.74	505.66	840.44	1289.31
250	-10.70	-12.68	-6.49	31.06	119.16	276.26	520.30	868.85	1339.11
500	-10.69	-12.63	-6.45	31.33	120.34	279.62	527.92	883.74	1365.40
1000	-10.68	-12.60	-6.42	31.47	120.94	281.33	531.80	891.36	1378.91

RÉFÉRENCES

- [1] Allouche, J.-P., Cohen, H., Mendès France, M., Shallit, J.O.: De nouveaux curieux produits infinis. Acta Arith. **49**(2), 141–153 (1987)
<https://doi.org/10.4064/aa-49-2-141-153>
- [2] Allouche, J.-P., Shallit, J.O.: Infinite products associated with counting blocks in binary strings. J. London Math. Soc. (2) **39**(2), 193–204 (1989)
<https://doi.org/10.1112/jlms/s2-39.2.193>
- [3] Allouche, J.-P., Shallit, J.: Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations, p. 571. Cambridge University Press, Cambridge, (2003).
<https://doi.org/10.1017/CB09780511546563>
- [4] Allouche, J.-P., Shallit, J., Sondow, J.: Summation of series defined by counting blocks of digits. J. Number Theory **123**(1), 133–143 (2007)
<https://doi.org/10.1016/j.jnt.2006.06.001>
- [5] Allouche, J.-P., Morin, C.: Kempner-like harmonic series. (AMM, to appear) (2023).
<https://arxiv.org/abs/2305.18180>
- [6] Allouche, J.-P., Hu, Y., Morin, C.: Ellipsephic harmonic series revisited (2024).

- <https://arxiv.org/abs/2403.05678>
- [7] Aloui, K., Mauduit, C., Mkaouar, M.: Somme des chiffres et répartition dans les classes de congruence pour les palindromes ellipséphiqes. *Acta Math. Hungar.* **151**(2), 409–455 (2017) <https://doi.org/10.1007/s10474-017-0688-4>
 - [8] Baillie, R.: Sums of reciprocals of integers missing a given digit. *Amer. Math. Monthly* **86**(5), 372–374 (1979) <https://doi.org/10.2307/2321096>
 - [9] Baillie, R.: Summing the curious series of Kempner and Irwin (2008). <https://arxiv.org/abs/0806.4410>
 - [10] Burnol, J.-F.: Moments in the exact summation of the curious series of Kempner type (2024). <https://arxiv.org/abs/2402.08525>
 - [11] Burnol, J.-F.: Measures for the summation of Irwin series (2024). <https://arxiv.org/abs/2402.09083>
 - [12] Burnol, J.-F.: Sur l’asymptotique des sommes de Kempner pour de grandes bases (2024). <https://arxiv.org/abs/2403.01957>
 - [13] Burnol, J.-F.: Digamma function and general Fischer series in the theory of Kempner sums (2024). <https://arxiv.org/abs/2403.03912>
 - [14] Dartyge, C., Mauduit, C.: Nombres presque premiers dont l’écriture en base r ne comporte pas certains chiffres. *J. Number Theory* **81**(2), 270–291 (2000) <https://doi.org/10.1006/jnth.1999.2458>
 - [15] de Bruijn, N.G.: *Asymptotic Methods in Analysis*, 3rd edn., p. 200. Dover Publications, Inc., New York, (1981)
 - [16] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G.: *Higher Transcendental Functions*. Vol. I, p. 302. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, (1981). Based on notes left by Harry Bateman, With a preface by Mina Rees, With a foreword by E. C. Watson, Reprint of the 1953 original
 - [17] Erdős, P., Mauduit, C., Sárközy, A.: On arithmetic properties of integers with missing digits. I. Distribution in residue classes. *J. Number Theory* **70**(2), 99–120 (1998) <https://doi.org/10.1006/jnth.1998.2229>
 - [18] Farhi, B.: A curious result related to Kempner’s series. *Amer. Math. Monthly* **115**(10), 933–938 (2008) <https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920611>
 - [19] Fischer, H.-J.: Die Summe der Reziproken der natürlichen Zahlen ohne Ziffer 9. *Elem. Math.* **48**(3), 100–106 (1993)
 - [20] Gordon, R.A.: Comments on “Subsums of the harmonic series”. *Amer. Math. Monthly* **126**(3), 275–279 (2019) <https://doi.org/10.1080/00029890.2019.1551022>
 - [21] Hardy, G.H., Wright, E.M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th edn., p. 621. Oxford University Press, Oxford, (2008). Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles
 - [22] Hu, Y.: Patterns in numbers and infinite sums and products. *J. Number Theory* **162**, 589–600 (2016) <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2015.09.025>
 - [23] Irwin, F.: A Curious Convergent Series. *Amer. Math. Monthly* **23**(5), 149–152 (1916) <https://doi.org/10.2307/2974352>
 - [24] Kempner, A.J.: A Curious Convergent Series. *Amer. Math. Monthly* **21**(2), 48–50 (1914) <https://doi.org/10.2307/2972074>
 - [25] Kløve, T.: Power sums of integers with missing digits. *Math. Scand.* **28**, 247–251 (1971) <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11021>
 - [26] Köhler, G., Spilker, J.: Dirichlet-Reihen zu Kempners merkwürdiger konvergenter Reihe. *Math. Semesterber.* **56**(2), 187–199 (2009) <https://doi.org/10.1007/s00591-009-0059-5>
 - [27] Lubeck, B., Ponomarenko, V.: Subsums of the harmonic series. *Amer. Math. Monthly*

- 125**(4), 351–355 (2018) <https://doi.org/10.1080/00029890.2018.1420996>
- [28] Maynard, J.: Primes with restricted digits. *Invent. Math.* **217**(1), 127–218 (2019) <https://doi.org/10.1007/s00222-019-00865-6>
- [29] Mukherjee, R., Sarkar, N.: A short note on a curious convergent series. *Asian-Eur. J. Math.* **14**(9), 2150158–3 (2021) <https://doi.org/10.1142/S1793557121501588>
- [30] Nathanson, M.B.: Curious convergent series of integers with missing digits. *Integers* **21A**, 18–9 (2021)
- [31] Nathanson, M.B.: Convergent series of integers with missing digits. *Ramanujan J.* **58**(2), 667–676 (2022) <https://doi.org/10.1007/s11139-021-00444-5>
- [32] Olver, F.W.J.: *Asymptotics and Special Functions*. AKP Classics, p. 572. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, (1997). Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York]
- [33] Schmelzer, T., Baillie, R.: Summing a curious, slowly convergent series. *Amer. Math. Monthly* **115**(6), 525–540 (2008) <https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920559>
- [34] Segal, A.C., Lepp, B., Fine, N.J.: Problems and Solutions: Solutions of Elementary Problems: E2204. *Amer. Math. Monthly* **77**(9), 1009–1010 (1970) <https://doi.org/10.2307/2318129>
- [35] Wadhwa, A.D.: Some convergent subseries of the harmonic series. *Amer. Math. Monthly* **85**(8), 661–663 (1978) <https://doi.org/10.2307/2320338>
- [36] Walker, A., Walker, A.: Arithmetic progressions with restricted digits. *Amer. Math. Monthly* **127**(2), 140–150 (2020) <https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1682888>

UNIVERSITÉ DE LILLE, FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, CITÉ SCIENTIFIQUE, F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE

Adresse de courrier électronique: jean-francois.burnol@univ-lille.fr