

УДК 517.5

**Є.О. Севостьянов** (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ)

**В.А. Таргонський** (Житомирський державний університет імені Івана Франка)

**E.O. Sevost'yanov** (Zhytomyr Ivan Franko State University; Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Slov'yans'k)

**V.A. Targonskii** (Zhytomyr Ivan Franko State University)

**Про збіжність послідовності відображень з оберненою модульною умовою до дискретного відображення**

**On convergence of a sequence of mappings with inverse modulus inequality to a discrete mapping**

Досліджені відображення, які задовольняють обернену нерівність типу Полецького в області евклідового простору. Доведено, що рівномірна границя сім'ї таких відображень є дискретним відображенням. Окремо розглянуті області, локально зв'язні на своїй межі, та регулярні області в квазіконформному сенсі.

We have studied the mappings that satisfy the Poletsky-type inverse inequality in the domain of the Euclidean space. It is proved that the uniform boundary of the family of such mappings is a discrete mapping. We separately considered domains that are locally connected at their boundary and regular domains in the quasiconformal sense.

**1. Вступ.** Дана стаття присвячена дослідженню відображень з обмеженим і скінченним спотворенням, див., напр., [1], [2], [3], [4] і [5]. У нашій нещодавній публікації [6] ми довели дискретність відображення в замиканні області, яке задовольняє одну (обернену) умову спотворення модуля сімей кривих та само є відкритим, дискретним і замкненим у ній. Отримання цього результату передбачає можливість неперервного продовження на межу, що за вказаних умов також виконується (див. там же; див. також [7]). Дана замітка присвячена отриманню більш загального результату: ми покажемо, що аналогічну властивість задовольняють не тільки самі відображення, але й рівномірні границі послідовності відображень. Зауважимо, що результати, близькі до наведених у цій роботі, отримані для квазірегулярних відображень в [4].

Звернемося до означень. Всюди далі  $M(\Gamma)$  позначає модуль сім'ї  $\Gamma$  (див. [5]). Нехай  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < r_1 < r_2 < \infty$  і

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}. \quad (1)$$

Нехай  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , тоді покладемо

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad \mathbb{B}^n = B(0, 1),$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}.$$

Для заданих множин  $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  і області  $D \subset \mathbb{R}^n$  позначимо через  $\Gamma(E, F, D)$  сім'ю всіх кривих  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  таких, що  $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$  і  $\gamma(t) \in D$  при  $t \in [a, b]$ . Якщо  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – задане відображення,  $y_0 \in f(D)$  і  $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup_{y \in f(D)} |y - y_0|$ ,

то через  $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$  ми позначимо сім'ю всіх кривих  $\gamma$  в області  $D$  таких, що  $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$ . Нехай  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  – вимірна за Лебегом функція,  $Q(x) \equiv 0$  при  $x \in \mathbb{R}^n \setminus f(D)$ . Будемо говорити, що  $f$  задовольняє обернену нерівність Полецького в точці  $y_0 \in f(D) \setminus \{\infty\}$ , якщо співвідношення

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|) dm(y) \quad (2)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$  такий, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (3)$$

За допомогою інверсії  $\psi(y) = \frac{y}{|y|^2}$  можна також визначити співвідношення (2) у точці  $y_0 = \infty$ . Відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  називається *дискретним*, якщо прообраз  $\{f^{-1}(y)\}$  кожної точки  $y \in \mathbb{R}^n$  складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини  $U \subset D$  є відкритою множиною в  $\mathbb{R}^n$ . Відображення  $f$  області  $D$  на  $D'$  називається *замкненим*, якщо  $f(E)$  є замкненим в  $D'$  для будь-якої замкненої множини  $E \subset D$  (див., напр., [4, розд. 3]). У подальшому, в розширеному просторі  $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  використовується *сферична (хордальна) метрика*  $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$ , де  $\pi$  – стереографічна проекція  $\overline{\mathbb{R}^n}$  на сферу  $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а саме,

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}},$$

$$h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y \quad (4)$$

(див., напр., [5, означення 12.1]). Всюди далі межа  $\partial A$  множини  $A$  і замикання  $\bar{A}$  слід розуміти в сенсі розширеного евклідового простору  $\bar{\mathbb{R}}^n$ . Неперервне продовження відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  також (якщо непорозуміння є неможливим) слід розуміти з точки зору відображення зі значеннями в  $\bar{\mathbb{R}}^n$  і відносно метрики  $h$  у (4). Нагадаємо, що область  $D \subset \mathbb{R}^n$  називається *локально зв'язною в точці*  $x_0 \in \partial D$ , якщо для будь-якого околу  $U$  точки  $x_0$  знайдеться окіл  $V \subset U$  точки  $x_0$  такий, що  $V \cap D$  є зв'язним. Область  $D$  локально зв'язна на  $\partial D$ , якщо  $D$  локально зв'язна в кожній точці  $x_0 \in \partial D$ . Ми кажемо, що область  $D$  є *скінченно зв'язною* у точці  $x_0 \in \partial D$ , якщо для будь-якого околу  $U$  точки  $x_0$  існує окіл  $V \subset U$  цієї точки такий, що  $V \cap D$  складається зі скінченної кількості компонент зв'язності. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *нульвимірним*, якщо для кожної точки  $y \in Y$  множина  $f^{-1}(y)$  не містить в собі континуум  $K \subset X$ , відмінний від точки. Межа області  $D$  називається *слабко плоскою* в точці  $x_0 \in \partial D$ , якщо для кожного  $P > 0$  і для будь-якого околу  $U$  точки  $x_0$  знайдеться окіл  $V \subset U$  цієї ж самої точки такий, що  $M(\Gamma(E, F, D)) > P$  для будь-яких континуумів  $E, F \subset D$ , які перетинають  $\partial U$  і  $\partial V$ . Межа області  $D$  називається *слабко плоскою*, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі  $D$ .

Для відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , множини  $E \subset D$  та  $y \in \mathbb{R}^n$ , визначимо *функцію кратності*  $N(y, f, E)$  як кількість прообразів точки  $y$  у множині  $E$ , тобто

$$N(y, f, E) = \text{card} \{x \in E : f(x) = y\},$$

$$N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Будемо говорити, що функція  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  має *скінченне середнє коливання* у точці  $x_0 \in D$ , пишемо  $\varphi \in FMO(x_0)$ , якщо  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| dm(x) < \infty$ , де

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) dm(x). \text{ Покладемо}$$

$$q_{y_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(y_0, r)} Q(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad (5)$$

де  $\omega_{n-1}$  позначає площу одиничної сфери  $\mathbb{S}^{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$ , Виконуються наступні твердження.

**Теорема 1.** Нехай  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – область, яка має слабо плоску межу, а область  $D' \subset \mathbb{R}^n$  є скінченно зв'язною на своїй межі. Припустимо,  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області  $D$  на  $D'$ , які збігаються рівномірно у  $D$  до деякого (не тотожно сталого) відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці  $y_0 \in \overline{D'}$ . Нехай також виконана одна з двох умов:

$$1) Q \in FMO(\overline{D'});$$

$$2) \text{ для будь-якого } y_0 \in \overline{D'} \text{ знайдеться } \delta(y_0) > 0 \text{ таке, що для достатньо малих } \varepsilon > 0$$

виконуються умови

$$\int_{\varepsilon}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty, \quad \int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty. \quad (6)$$

Тоді відображення  $f$  є нульвимірним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ ,  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'$  і  $\bar{f}$  є нульвимірним відносно  $\bar{D}$ .

У випадку, коли відображена область є не скінченно зв'язною, а навіть локально зв'язною на своїй межі, крім того,  $f$  зберігає орієнтацію, маємо більш посилений варіант теореми 1.

**Теорема 2.** Нехай в умовах теореми 1  $D'$  є локально зв'язною на своїй межі, а відображення  $f$  зберігає орієнтацію. Тоді відображення  $f$  є відкритим, дискретним і замкненим у  $D$ , і має неперервне продовження  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$  таке, що  $f(D) = D'$ ,  $f(\bar{D}) = \bar{D}'$  і  $N(f, D) = N(f, \bar{D}) < \infty$ . Зокрема,  $\bar{f}$  є дискретним у  $\bar{D}$ .

**2. Основні леми.** Наступне твердження доведено в [6, лема 3.1] для окремого відображення, див. також відповідний класичний варіант для квазірегулярних відображень у [4, лема 4.4]. Версія, яка наведена нижче, стосується збіжної послідовності відображень.

**Лема 1.** Нехай  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – область, яка має слабо плоску межу. Припустимо,  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність відкритих дискретних відображень області  $D$  на  $D'$ , які збігаються рівномірно у  $D$  до деякого (не тотожно сталого) відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці  $y_0 \in \bar{D}'$ . Припустимо, що для кожного  $y_0 \in \bar{D}'$  знайдеться  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$  і вимірна за Лебегом функція  $\psi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7)$$

і, крім того, при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^n(|y - y_0|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (8)$$

де  $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$  визначено в (1). Нехай  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , – довільна послідовність континуумів така, що  $h(C_j) \geq \delta > 0$  для деякого  $\delta > 0$  і всіх  $j \in \mathbb{N}$  і, крім того,  $h(f(C_j)) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Тоді для кожного  $y_0 \in \bar{D}'$  знайдеться  $\delta_1 > 0$  таке, що

$$h(f(C_j), y_0) \geq \delta_1 > 0 \quad (9)$$

для всіх  $m \in \mathbb{N}$  і  $j \in \mathbb{N}$ .

**Зауваження 1.** У точці  $y_0 = \infty$  співвідношення (8) слід розуміти за допомогою інверсії  $\psi(y) = \frac{y}{|y|^2}$  в нулі. Тобто, замість

$$\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^n(|y - y_0|) dm(y) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$$

буде розглядатися умова

$$\int_{A(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \cdot \psi^n(|y|) dm(y) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)).$$

*Доведення лема 1.* Надалі вважаємо  $y_0 \neq \infty$ . Припустимо супротивне, а саме, нехай  $h(f(C_{j_k}), y_0) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для деякої зростаючої послідовності номерів  $j_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . З огляду на [8, лема 1]  $f$  або нульвимірне, або стале відображення. Оскільки за припущенням  $f$  не є сталим,  $f$  – нульвимірне. Тоді існує точка  $z_0 \in D$  така, що  $f(z_0) \neq y_0$ . Оскільки  $f$  неперервне відображення, можна знайти  $r_0 > 0$  таке, що

$$\overline{B(z_0, r_0)} \subset D, \quad f(\overline{B(z_0, r_0)}) \cap \overline{B(y_0, \varepsilon_1)} = \emptyset, \quad (10)$$

де  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$  і  $\varepsilon_0$  – число зі співвідношень (7)–(8). Покладемо  $F := \overline{B(z_0, r_0)}$  і позначимо  $\Gamma_k := \Gamma(F, C_{j_k}, D)$ .

З огляду на (10) покажемо, що існує окіл  $V$  елементу  $y_0$  такий, що

$$f_j(F) \cap V = \emptyset, \quad j = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Припустимо протилежне. Тоді існують послідовності  $j_m \in \mathbb{N}$  і  $x_m \in F$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , такі, що  $f_{j_m}(x_m) \rightarrow y_0$  при  $m \rightarrow \infty$ . З огляду на те, що  $f_{j_m}(F)$  є компактом у  $D'$  при кожному фіксованому  $m$ , послідовність індексів  $j_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , можна вважати зростаючою. Тоді за нерівністю трикутника

$$h(f(x_m), y_0) \leq h(f(x_m), f_{j_m}(x_m)) + h(f_{j_m}(x_m), y_0) \rightarrow 0 \quad (12)$$

при  $m \rightarrow \infty$ , оскільки  $h(f(x_m), f_{j_m}(x_m)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  по рівномірній збіжності  $f_m$  до  $f$  у  $D$  по метриці  $h$ . Співвідношення (12) суперечить (10), що доводить (11).

Зауважимо, що область зі слабо плоскою межею є рівномірною (див. [6, наслідок 4.3]), тобто, якщо континууми  $C_{j_k}$  задовольняють умову  $h(C_{j_k}) \geq \delta > 0$  і  $h(F) > \delta_* > 0$ , то знайдеться  $\delta_2 > 0$  таке, що

$$M(\Gamma_k) \geq \delta_2 > 0 \quad (13)$$

для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . Доведемо, що для кожного  $l \in \mathbb{N}$  існує номер  $k = k_l$  такий, що

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset B(y_0, 1/l), \quad k \geq k_l. \quad (14)$$

Припустимо протилежне. Тоді існує  $l_0 \in \mathbb{N}$  таке, що

$$f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(y_0, 1/l_0)) \neq \emptyset \quad (15)$$

для деякої зростаючої послідовності номерів  $k_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . В такому випадку, знайдеться послідовність  $z_m \in f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(y_0, 1/l_0))$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Нехай  $z_m = f_{j_{k_m}}(x_m)$ ,  $x_m \in C_{j_{k_m}}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Оскільки за припущенням  $h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) \rightarrow 0$  для деякої зростаючої послідовності номерів  $j_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то зокрема

$$h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) \rightarrow 0 \quad \text{п} \quad m \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Оскільки  $h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) = \inf_{y \in f(C_{j_{k_m}})} h(y, y_0)$  і  $f(C_{j_{k_m}})$  є компактом як неперервний образ компакту  $C_{j_{k_m}}$  при відображенні  $f$ , звідси випливає, що  $h(f(C_{j_{k_m}}), y_0) = h(y_m, y_0)$ , де  $y_m \in f(C_{j_{k_m}})$ . Тоді зі співвідношення (16) ми отримаємо, що  $y_m \rightarrow y_0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Оскільки за умовою  $h(f(C_j)) = \sup_{y, z \in f(C_j)} h(y, z) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ , то  $h(y_m, f(x_m)) \leq h(f(C_{j_{k_m}})) \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ . Тоді за нерівністю трикутника і за доведеним вище ми будемо мати, що:

$$\begin{aligned} h(z_m, y_0) &= h(f_{j_{k_m}}(x_m), y_0) \leq \\ &\leq h(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) + h(f(x_m), y_m) + h(y_m, y_0) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (17)$$

оскільки  $h(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) \leq \sup_{x \in D} h(f_{j_{k_m}}(x), f(x)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  за рівномірною збіжністю  $f_j$  до  $f$  при  $j \rightarrow \infty$ ; останні два члени в (17) також прямують до нуля за побудовою та доведеним вище. Зі співвідношення (17) випливає, що  $z_m \rightarrow y_0$  при  $m \rightarrow \infty$ , що суперечить визначенню  $z_m$ . Тоді припущення в (15) є невірним, що доводить (14).

З (14) випливає, що

$$f_{j_{k_l}}(C_{j_{k_l}}) \subset B(y_0, 1/l), \quad (18)$$

причому можна вважати послідовність номерів  $k_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , зростаючою. Переходячи у (18) до перенумерації можна вважати, що сама послідовність  $j_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , задовольняє цю умову, тобто,

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset B(y_0, 1/k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Зменшуючи за потреби число  $\varepsilon_0 > 0$  з умови леми можна вважати, що окіл  $V$  точки  $y_0$  у (11) є таким, що  $\overline{B(y_0, \varepsilon_0)} \subset V$ . Крім того, нехай  $k_0 \in \mathbb{N}$  є таким, що  $B(y_0, 1/k) \subset B(y_0, \varepsilon_0)$  при всіх  $k \geq k_0$ . В такому випадку, зауважимо, що

$$f_{j_k}(\Gamma_{j_k}) > \Gamma(S(y_0, 1/k), S(y_0, \varepsilon_0), A(y_0, 1/k, \varepsilon_0)). \quad (20)$$

Дійсно, нехай  $\tilde{\gamma} \in f_{j_k}(\Gamma_{j_k})$ . Тоді  $\tilde{\gamma}(t) = f_{j_k}(\gamma(t))$ , де  $\gamma \in \Gamma_{j_k}$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ,  $\gamma(0) \in F$ ,  $\gamma(1) \in C_{j_k}$ . За співвідношенням (11) маємо, що  $f_{j_k}(\gamma(0)) \in f(F) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(y_0, \varepsilon_0)}$ , крім того, за співвідношенням (19) ми отримаємо, що  $f_{j_k}(\gamma(1)) \in f_{j_k}(C_{j_k}) \subset B(y_0, \varepsilon_0)$ . Отже,  $|f(\gamma(t))| \cap B(y_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset \neq |f(\gamma(t))| \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(y_0, \varepsilon_0))$ . Тоді з огляду на [9, теорема 1.1.5.46] ми отримаємо, що існує  $0 < t_1 < 1$  таке, що  $f_{j_k}(\gamma(t_1)) \in S(y_0, \varepsilon_0)$ . Покладемо  $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1, 1]}$ . Можна вважати, що  $f_{j_k}(\gamma(t)) \in B(y_0, \varepsilon_0)$  при всіх  $t \geq t_1$ . Міркуючи аналогічно, ми отримаємо точку  $t_2 \in (t_1, 1]$  таку, що  $f_{j_k}(\gamma(t_2)) \in S(y_0, 1/k)$ . Покладемо  $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$ . Можна вважати, що  $f_{j_k}(\gamma(t)) \notin B(y_0, 1/k)$  при всіх  $t \in [t_1, t_2]$ . Тоді крива  $f_{j_k}(\gamma_2)$  є підкривою кривої  $f_{j_k}(\gamma) = \tilde{\gamma}$ , яка належить до сім'ї  $\Gamma(S(y_0, 1/k), S(y_0, \varepsilon_0), A(y_0, 1/k, \varepsilon_0))$ . Співвідношення (20) встановлено.

З (20) випливає, що

$$\Gamma_{j_k} > \Gamma_{f_{j_k}}(S(y_0, 1/k), S(y_0, \varepsilon_0), A(y_0, 1/k, \varepsilon_0)). \quad (21)$$

Покладемо

$$\eta_k(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(1/k, \varepsilon_0), & t \in (1/k, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (1/k, \varepsilon_0), \end{cases}$$

де  $I(1/k, \varepsilon_0) = \int_{1/k}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$ . Зауважимо, що  $\int_{1/k}^{\varepsilon_0} \eta_l(t) dt = 1$ . Тоді за співвідношеннями (8) і (21), а також з огляду на означення відображення  $f_{j_k}$  у (2) будемо мати:

$$\begin{aligned} M(\Gamma_{j_k}) &\leq M(\Gamma_{f_{j_k}}(S(y_0, 1/k), S(y_0, \varepsilon_0), A(y_0, 1/k, \varepsilon_0))) \leq \\ &\leq \frac{1}{I^n(1/k, \varepsilon_0)} \int_{A(y_0, 1/k, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^n(|y - y_0|) dm(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Останнє співвідношення суперечить (13). Отримана суперечність доводить лему.  $\square$

Ми кажемо, що область  $D$  є *скінченно зв'язною* у точці  $x_0 \in \partial D$ , якщо для будь-якого околу  $U$  точки  $x_0$  існує окіл  $V \subset U$  цієї точки такий, що  $V \cap D$  складається зі скінченної кількості компонент зв'язності. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *нульвимірним*, якщо для кожної точки  $y \in Y$  множина  $f^{-1}(y)$  не містить в собі континуум  $K \subset X$ , відмінний від точки. Наступна лема узагальнює наслідок 4.5 у [4] на випадок відображень з необмеженою характеристикою. Міркування, застосовані при її доведенні, по більшій мірі аналогічні доведенню леми 3.2 в [6].

**Лема 2.** Нехай  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – область, яка має слабо плоску межу, а область  $D' \subset \mathbb{R}^n$  є скінченно зв'язною на своїй межі. Припустимо,  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області  $D$  на  $D'$ , які збігаються рівномірно у  $D$  до деякого відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці  $y_0 \in \overline{D'}$ . Нехай для будь-якого  $y_0 \in \overline{D'}$  знайдеться  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$  і вимірна за Лебегом функція  $\psi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що виконуються співвідношення (7)–(8), де  $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$  визначено в (1). Тоді відображення  $f$  є нульвимірним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$ ,  $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$  і  $\bar{f}$  є нульвимірним відносно  $\overline{D}$ .

*Доведення.* Можна вважати  $y_0 \neq \infty$ . З огляду на [8] відображення  $f$  є нульвимірним у  $D$ . За лемою 5.1 в [6], кожне  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , має неперервне продовження  $\bar{f}_m : \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$  на  $\overline{D}$  таке, що  $\bar{f}_m(\overline{D}) = \overline{D'}$ . Покажемо, що існує  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  для кожного  $x_0 \in \partial D$ . Дійсно, за нерівністю трикутника

$$h(f(x), f(x_0)) \leq h(f(x), f_m(x)) + h(f_m(x), f_m(x_0)) + h(f_m(x_0), f(x_0)).$$

У цій нерівності перший і третій доданки прямують до нуля з огляду на рівномірну збіжність  $f_m$  у  $D$ . Отже, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться номер  $M = M(\varepsilon)$  такий, що при  $m \geq M(\varepsilon)$

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + h(f_m(x), f_m(x_0)). \quad (23)$$

При  $m = M(\varepsilon)$  відображення  $f_m$  неперервно продовжується в точку  $x_0$ , так що знайдеться  $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$  таке, що  $h(f_m(x), f_m(x_0)) < \varepsilon/3$  при  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Тоді з огляду на (23)  $h(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  при тих же  $\delta$ .

Покажемо, що  $f$  – замкнене у  $D$ . Нехай  $E$  – замкнене в  $D$ . Треба показати, що  $f(E)$  замкнене в  $D'$ . Нехай  $z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність у  $f(E)$  така, що  $z_m \rightarrow z_0 \in D'$  при  $m \rightarrow \infty$ . Покажемо, що  $z_0 \in f(E)$ . Оскільки  $z_m \in f(E)$ , знайдуться  $x_m \in E$  такі, що  $f(x_m) = z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . З огляду на компактність  $\overline{\mathbb{R}^n}$  можна вважати, що

послідовність  $x_m$  збігається до деякого  $x_0 \in \overline{D}$  при  $m \rightarrow \infty$ . Якщо  $x_0 \in D$ , то  $x_0 \in E$ , отже,  $f(x_0) = z_0 \in E$  з огляду на неперервність відображення  $f$  у  $D$ . Якщо ж  $x_0 \in \partial D$ , то, оскільки  $f_m$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , знайдеться послідовність  $w_m \in D$ ,  $w_m \rightarrow x_0$  при  $m \rightarrow \infty$ , така що  $h(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$ . Тоді за нерівністю трикутника

$$\begin{aligned} h(f_m(x_0), f(x_0)) &\leq h(f_m(x_0), f_m(w_m)) + h(f_m(w_m), f(w_m)) + h(f(w_m), f(x_0)) \leq \\ &\leq \frac{1}{m} + h(f_m(w_m), f(w_m)) + h(f(w_m), f(x_0)) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (24)$$

оскільки  $f_m$  збігається до  $f$  рівномірно у  $D$ , а  $f$  неперервна в точці  $x_0$  за доведеним вище. З огляду на те, що  $f_m(x_0) \in \partial D$  при  $m \in \mathbb{N}$  за умовою відкритості, дискретності і замкненості  $f_m$  (див. [4, теорема 3.3]), а також по замкненості межі  $\partial D$ , маємо:  $f(x_0) \in \partial D'$ . Тоді по неперервності  $f$  у  $\overline{D}$  маємо:  $f(x_m) = z_m \rightarrow z_0 \in D'$  і  $f(x_0) = z_0 \in \partial D'$ . Це суперечить обранню  $z_0 \in E \subset D'$ . Остаточно,  $f(E)$  є замкненим в  $D'$ , бо в випадку  $x_0 \in D$  це встановлено, а випадок  $x_0 \in \partial D$  неможливий.

Покажемо, що  $f(\partial D) \subset \partial D'$ . Справді, нехай  $x_0 \in \partial D$ . Треба довести, що  $f(x_0) \in \partial D'$ . Оскільки  $f_m$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , знайдеться послідовність  $w_m \in D$ ,  $w_m \rightarrow x_0$  при  $m \rightarrow \infty$ , така що  $h(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$ . Повторюючи міркування у (24), приходимо до висновку  $f(x_0) \in \partial D'$ , що і треба було встановити.

Покажемо, що  $\overline{f(D)} = \overline{D'}$ . Доведення аналогічно до останньої частини доведення теореми 3.1 в [7]. Очевидно, що  $\overline{f(D)} \subset \overline{D'}$ . Покажемо, що  $\overline{D'} \subset \overline{f(D)}$ . Справді, нехай  $y_0 \in \overline{D'}$ , тоді або  $y_0 \in D'$ , або  $y_0 \in \partial D'$ . а) Якщо  $y_0 \in D'$ , то  $y_0 = f_j(x_j)$ ,  $x_j \in D$ . Можна вважати, що  $x_j \rightarrow x_0$ ,  $j \rightarrow \infty$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ . За неперервністю  $f$  у  $\overline{D}$  маємо:  $f(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j)$ . Проте, за рівномірною збіжністю  $f_j$  до  $f$  маємо:  $f_j(x_j) - f(x_j) = y_0 - f(x_j) \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Тоді  $y_0 = f(x_0)$ . Оскільки за доведеним  $f(\partial D) \subset \partial D'$ , маємо:  $x_0 \in D$ . Отже,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $x_0 \in D$ . б) Нарешті, нехай  $y_0 \in \partial D'$ , тоді знайдеться послідовність  $y_k \in D'$  така, що  $y_k = f(x_k) \rightarrow y_0$  при  $k \rightarrow \infty$  і  $x_k \in D$ . Через компактність простору  $\overline{\mathbb{R}^n}$  ми можемо вважати, що  $x_k \rightarrow x_0$ , де  $x_0 \in \overline{D}$ . Тоді  $\overline{f(x_0)} = y_0 \in \overline{f(\partial D)} \subset \overline{f(D)}$ . Отже,  $\overline{D'} \subset \overline{f(D)}$ .

Залишилося показати нульвимірність  $\overline{f}$  на  $\partial D'$ . Припустимо супротивне, а саме, нехай існує точка  $y_0 \in \partial D'$  така, що  $f^{-1}(y_0) \supset K_0$ , де  $K_0 \subset \overline{D}$  – деякий невідроджений континуум. Оскільки  $f$  нульвимірне в  $D$ , можна вважати, що  $K_0 \subset \partial D$ .

Оскільки  $\overline{D}$  – компакт в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , і крім того, відображення  $\overline{f}$  є неперервним в  $\overline{D}$ , воно є рівномірно неперервним в  $\overline{D}$ . В цьому випадку, для кожного  $j \in \mathbb{N}$  знайдеться  $\delta_j < 1/j$  таке, що

$$h(\overline{f}(x), \overline{f}(x_0)) = h(\overline{f}(x), y_0) < 1/j \quad \forall x, x_0 \in \overline{D}, \quad h(x, x_0) < \delta_j, \quad \delta_j < 1/j. \quad (25)$$

Позначимо  $B_h(x_0, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < r\}$ . Тоді для заданого  $j \in \mathbb{N}$ , покладемо

$$B_j := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Оскільки множина  $B_j$  є околom континуума  $K_0$ , за [10, лема 2.2] існує окіл  $U_j$  множини  $K_0$  такий, що  $U_j \subset B_j$  і множина  $U_j \cap D$  є зв'язною. Без обмеження загальності можна



вважати, що  $U_j$  – відкрита множина. Тоді множина  $U_j \cap D$  також лінійно зв’язна (див. [3, пропозиція 13.1]). Оскільки  $K_0$  – компакт, то знайдуться  $z_0, w_0 \in K_0$  такі, що  $h(K_0) = h(z_0, w_0)$ . Звідси випливає, що знайдуться елементи  $z_j \in U_j \cap D$  і  $w_j \in U_j \cap D$  такі, що  $z_j \rightarrow z_0$  і  $w_j \rightarrow w_0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Ми можемо припускати, що

$$h(z_j, w_j) > h(K_0)/2 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Оскільки множина  $U_j \cap D$  лінійно зв’язна, точки  $z_j$  і  $w_j$  деякою кривою  $\gamma_j \in U_j \cap D$ . Покладемо  $C_j := |\gamma_j|$ .

Зауважимо, що  $h(f(C_j)) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Дійсно, оскільки  $f(C_j)$  – континуум в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , існують такі точки  $y_j, y'_j \in f(C_j)$  такі, що  $h(f(C_j)) = h(y_j, y'_j)$ . Тоді існують  $x_j, x'_j \in C_j$  такі, що  $y_j = f(x_j)$  і  $y'_j = f(x'_j)$ . Тоді точки  $x_j$  і  $x'_j$  належать до  $U_j \subset B_j$ . Це означає, що існують  $x_1^j$  і  $x_2^j \in K_0$  такі, що  $x_j \in B(x_1^j, \delta_j)$  і  $x'_j \in B(x_2^j, \delta_j)$ . В такому випадку, за співвідношенням (25) і з огляду на нерівність трикутника ми отримаємо, що

$$\begin{aligned} h(f(C_j)) &= h(y_j, y'_j) = h(f(x_j), f(x'_j)) \leq \\ &\leq h(f(x_j), f(x_1^j)) + h(f(x_1^j), f(x_2^j)) + h(f(x_2^j), f(x'_j)) < 2/j \rightarrow 0 \quad \text{п} \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Зі співвідношень (26) і (27) випливає, що континууми  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , задовольняють умови леми 1. За цією лемою  $h(f(C_j), y_0) \geq \delta_1 > 0$  для всіх  $j \in \mathbb{N}$ . З іншого боку, оскільки за доведеним вище  $x_j \in B(x_1^j, \delta_j)$ , то з огляду на співвідношення (25) ми отримаємо, що  $h(f(x_j), y_0) < 1/j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Отримана суперечність вказує на невірність припущення щодо відсутності нульвимірності відображення  $\bar{f}$  у  $\bar{D}$ . Лема доведена.  $\square$

Нарешті, сформулюємо і доведемо ключове твердження про дискретність відображення (див. [4, теорема 4.7]).

**Лема 3.** Нехай за умов леми 2 область  $D'$  є локально зв’язною на своїй межі, а відображення  $f$  зберігає орієнтацію. Тоді відображення  $f$  є відкритим, дискретним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ ,  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'$  таке, що  $N(f, D) = N(f, \bar{D}) < \infty$ . Зокрема,  $\bar{f}$  є дискретним у  $\bar{D}$ .

*Доведення.* Доведення майже повністю повторює схему, викладену в [4, теорема 4.7], див. також теорему 6.1 в [6]. Передусім, можливість продовження  $f$  до неперервного відображення  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ , нульвимірність і замкненість  $f$  і рівність  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'$  випливають з леми 2. Оскільки  $f$  зберігає орієнтацію і нульвимірне, воно також відкрите і дискретне за теоремою Тітуса-Янга (див. [17, стор. 333]). Зауважимо також, що  $N(f, D) < \infty$  з огляду на [11, теорема 2.8]. Залишилося довести рівність  $N(f, D) = N(f, \bar{D})$ . Далі будемо міркувати методом від супротивного: припустимо, що вказана рівність не виконується. Тоді знайдуться точки  $y_0 \in \partial D'$  і  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \partial D$  такі, що  $f(x_i) = y_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k+1$  і  $k := N(f, D)$ . Будемо вважати, що  $y_0 \neq \infty$ . Оскільки область  $D'$  є локально зв’язною в усіх точках своєї межі за припущенням, то для кожного  $p \in \mathbb{N}$  знайдеться окіл  $\bar{U}_p' \subset B(y_0, 1/p)$  такий, що множина  $\bar{U}_p' \cap D' = U_p'$  є зв’язною.

Доведемо, що для кожного  $i = 1, 2, \dots, k+1$  знайдеться компонента  $V_p^i$  множини  $f^{-1}(U_p')$  така, що  $x_i \in \bar{V}_p^i$ . Зафіксуємо  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . За неперервністю  $\bar{f}$  у  $\bar{D}$  знайдеться  $r_i = r_i(x_i) > 0$  таке, що  $f(B(x_i, r_i) \cap D) \subset U_p'$ . Оскільки область, яка є слабко плоскою, є локально зв’язною в кожній точці своєї межі (див. [3, лема 3.15]), то знайдеться окіл  $W_i \subset B(x_i, r_i)$  точки  $x_i$  такий, що  $W_i \cap D$  зв’язно. Тоді  $W_i \cap D$  належить одній

і тільки одній компоненті зв'язності  $V_i^p$  множини  $f^{-1}(U_p')$ , причому  $x_i \in \overline{W_i \cap D} \subset \overline{V_p^i}$ , що і треба було довести.

Далі покажемо, що множини  $\overline{V_p^i}$  є непересічними при всіх  $i = 1, 2, \dots, k+1$  і достатньо великих  $p \in \mathbb{N}$ . В свою чергу, доведемо для цього, що  $h(\overline{V_p^i}) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  для кожного фіксованого  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . Проведемо доведення від супротивного. Тоді існує таке  $1 \leq i_0 \leq k+1$ , число  $r_0 > 0$ ,  $r_0 < \frac{1}{2} \min_{1 \leq i, j \leq k+1, i \neq j} h(x_i, x_j)$  і зростаюча послідовність номерів  $p_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , такі, що  $S_h(x_{i_0}, r_0) \cap \overline{V_{p_m}^{i_0}} \neq \emptyset$ , де  $S_h(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, x_0) = r\}$ . В такому випадку, існують  $a_m, b_m \in V_{p_m}^{i_0}$ , такі що  $a_m \rightarrow x_{i_0}$  при  $m \rightarrow \infty$  і  $h(a_m, b_m) \geq r_0/2$ . З'єднаємо точки  $a_m$  і  $b_m$  кривою  $C_m$ , яка цілком належить  $V_{p_m}^{i_0}$ . Тоді  $h(|C_m|) \geq r_0/2$  при  $m = 1, 2, \dots$ . З іншого боку, оскільки  $|C_m| \subset f(V_{p_m}^{i_0}) \subset B(y_0, 1/p_m)$ , то одночасно  $h(f(|C_m|)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  і  $h(|C_m|, y_0) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , що суперечить лемі 1. Отримана суперечність вказує на невірність зробленого вище припущення.

За [4, лема 3.6]  $f$  є відображенням кожного  $\overline{V_p^i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k, k+1$ , на все  $U_p'$ , тобто,  $N(f, D) \geq k+1$ , що суперечить означення числа  $k$ . Отримана суперечність спростовує припущення, що  $N(f, \overline{D}) > N(f, D)$ . Лема доведена.  $\square$

Доведення теорем 1 і 2 впливає з лем 2 і 3 за рахунок спеціально підібраної функції  $\psi$ , див. [12, лема 1.3].  $\square$

**3. Випадок простих кінців.** Результати, доведені в попередніх секціях, залишаються справедливими для відображених областей, які не є локально зв'язними на своїй межі, але за певної додаткової геометрії на ці області. Для того, щоб сформулювати ці результати, наведемо деякі означення.

Нехай  $\omega$  – відкрита множина в  $\mathbb{R}^k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Неперервне відображення  $\sigma: \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  називається *k-вимірною поверхнею* в  $\mathbb{R}^n$ . Поверхнею будемо називати довільну  $(n-1)$ -вимірну поверхню  $\sigma$  в  $\mathbb{R}^n$ . Поверхня  $\sigma$  називається *жордановою поверхнею*, якщо  $\sigma(x) \neq \sigma(y)$  при  $x \neq y$ . Далі ми іноді будемо використовувати  $\sigma$  для позначення всього образу  $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$  при відображенні  $\sigma$ ,  $\overline{\sigma}$  замість  $\overline{\sigma(\omega)}$  в  $\mathbb{R}^n$  і  $\partial\sigma$  замість  $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$ . Жорданова поверхня  $\sigma: \omega \rightarrow D$  в області  $D$  називається *розрізом* області  $D$ , якщо  $\sigma$  розділяє  $D$ , тобто  $D \setminus \sigma$  має більше однієї компоненти,  $\partial\sigma \cap D = \emptyset$  і  $\partial\sigma \cap \partial D \neq \emptyset$ .

Послідовність  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$  розрізів області  $D$  називається *ланцюгом*, якщо:

(і) множина  $\sigma_{m+1}$  міститься в точності в одній компоненті  $d_m$  множини  $D \setminus \sigma_m$ , при цьому,  $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$ ; (ii)  $\bigcap_{m=1}^{\infty} d_m = \emptyset$ . З означення ланцюгу розрізів випливає, що  $d_1 \supset d_2 \supset d_3 \supset \dots \supset d_{m-1} \supset d_m \supset d_{m+1} \supset \dots$ . Два ланцюги розрізів  $\{\sigma_m\}$  і  $\{\sigma'_k\}$  називаються *еквівалентними*, якщо для кожного  $m = 1, 2, \dots$  область  $d_m$  містить всі області  $d'_k$  за виключенням скінченної кількості, і для кожного  $k = 1, 2, \dots$  область  $d'_k$  також містить всі області  $d_m$  за виключенням скінченної кількості.

*Кінець* області  $D$  – це клас еквівалентних ланцюгів розрізів області  $D$ . Нехай  $K$  – кінець області  $D$  в  $\mathbb{R}^n$ , тоді множина  $I(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$  називається *тілом кінця*  $K$ . Скрізь далі, як зазвичай,  $\Gamma(E, F, D)$  позначає сім'ю всіх таких кривих  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ , що  $\gamma(a) \in E$  і  $\gamma(b) \in F$ , крім того,  $M(\Gamma)$  позначає модуль сім'ї кривих  $\Gamma$  в  $\mathbb{R}^n$ , а запис  $\rho \in \text{adm } \Gamma$  означає, що функція  $\rho$  борелева, невід'ємна і має довжину, не меншу одиниці в метриці  $\rho$  (див. [13], [5]). Слідуючи [13], будемо говорити, що кінець  $K$  є *простим кінцем*, якщо  $K$  містить ланцюг розрізів  $\{\sigma_m\}$ , такий, що  $M(\Gamma(\sigma_m, \sigma_{m+1}, D)) < \infty$  при всіх  $m \in \mathbb{N}$ .

і  $\lim_{m \rightarrow \infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0$  для деякого континууму  $C$  в  $D$ . Далі використовуються наступні позначення: множина простих кінців, що відповідають області  $D$ , позначається символом  $E_D$ , а поповнення області  $D$  її простими кінцями позначається  $\overline{D}_P$ . Будемо говорити, що межа області  $D$  в  $\mathbb{R}^n$  є *локально квазіконформною*, якщо кожна точка  $x_0 \in \partial D$  має окіл  $U$  в  $\mathbb{R}^n$ , який може бути відображений квазіконформним відображенням  $\varphi$  на одиничну кулю  $\mathbb{B}^n := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  так, що  $\varphi(\partial D \cap U)$  є перетином  $\mathbb{B}^n$  з координатною гіперплощиною. Для множин  $E \subset \mathbb{R}^n$  і  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  покладемо

$$d(E) := \sup_{x, y \in E} |x - y|, \quad d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|.$$

Будемо називати ланцюг розрізів  $\{\sigma_m\}$  *регулярним*, якщо  $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \emptyset$  при кожному  $m \in \mathbb{N}$  і, крім того,  $d(\sigma_m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Якщо кінець  $K$  містить принаймні один регулярний ланцюг, то  $K$  будемо називати *регулярним*. Говоримо, що обмежена область  $D$  в  $\mathbb{R}^n$  *регулярна*, якщо  $D$  може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в  $\mathbb{R}^n$ , крім того, кожен простий кінець  $P \subset E_D$  є регулярним. Зауважимо, що у просторі  $\mathbb{R}^n$  кожен простий кінець регулярної області містить ланцюг розрізів з властивістю  $d(\sigma_m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , і навпаки, якщо у кінця є вказана властивість, то він – простий (див. [14, лема 3.1]; див. також [13, теорема 5.1]). Крім того, замикання  $\overline{D}_P$  регулярної області  $D$  є *метризовним*, при цьому, якщо  $g : D_0 \rightarrow D$  – квазіконформне відображення області  $D_0$  з локально квазіконформною межею на область  $D$ , то для  $x, y \in \overline{D}_P$  покладемо:

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|, \quad (28)$$

де для  $x \in E_D$  елемент  $g^{-1}(x)$  розуміється як деяка (єдина) точка межі  $D_0$ , коректно визначена з огляду на [14, теорема 2.1]; див. також [13, теорема 4.1]. Зокрема, будемо говорити, що послідовність  $x_m \in D$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , *збігається* до простого кінця  $P \in E_D$  при  $m \rightarrow \infty$ , якщо для будь-якого натурального  $k \in \mathbb{N}$  всі елементи послідовності  $x_m$ , крім скінченної кількості, належать області  $d_k$  (де  $d_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – послідовність вкладених областей з означення простого кінця  $P$ ).

Справедлива наступна

**Лема 4.** Нехай  $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – області в  $\mathbb{R}^n$ , причому  $D$  має слабо плоску межу, а  $D'$  є регулярною. Припустимо,  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність відкритих дискретних відображень області  $D$  на  $D'$ , які збігаються рівномірно у  $D$  до деякого (не тотожно сталого) відображення  $f : D \rightarrow \overline{D}'_P$  по метриці  $\rho$  у  $\overline{D}'_P$ , тобто,

$$\sup_{x \in D} \rho(f_j(x), f(x)) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці  $y_0 \in \overline{D}'$ . Припустимо, що для кожного  $y_0 \in \overline{D}'$  знайдеться  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$  і вимірна за Лебегом функція  $\psi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що виконані умови (7)–(8), де  $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$  визначено в (1). Нехай  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , – довільна послідовність континуумів така, що  $h(C_j) \geq \delta > 0$  для деякого  $\delta > 0$  і всіх  $j \in \mathbb{N}$  і, крім того,  $\rho(f(C_j)) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Тоді для кожного  $P_0 \in \overline{D}'_P$  знайдеться  $\delta_1 > 0$  таке, що

$$\rho(f(C_j), P_0) \geq \delta_1 > 0 \quad (29)$$

для всіх  $m \in \mathbb{N}$  і  $j \in \mathbb{N}$ . Тут, як звично,

$$\rho(A) = \sup_{x,y \in A} \rho(x,y), \quad \rho(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x,y).$$

*Доведення.* Надалі вважаємо  $P_0 \neq \infty$ . Припустимо супротивне, а саме, нехай для деякої зростаючої послідовності номерів  $j_k, k = 1, 2, \dots$ , виконана умова:  $\rho(f(C_{j_k}), P_0) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Оскільки за припущенням  $D'$  регулярна, існує відображення  $g$  деякої області  $D_0$  з локально квазіконформною межею на  $D'$ .

Доведемо, що зі збіжності послідовності  $f_j$  до відображення  $f$  рівномірно по метриці  $\rho$  при  $j \rightarrow \infty$  випливає локально рівномірна збіжність цієї ж послідовності у  $D$  відносно звичайної евклідової метрики. Припустимо протилежне. Тоді знайдеться компакт  $C$  у  $D$ , на якому збіжність  $f_j$  до  $f$  не рівномірна. Звідси випливає наявність числа  $\varepsilon_0 > 0$ , точок  $x_k \in C, k = 1, 2, \dots$ , зростаючої послідовності номерів  $j_k, k = 1, 2, \dots$ , і відображень  $f_{j_k}, k = 1, 2, \dots$ , таких, що

$$|f_{j_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0. \quad (30)$$

Оскільки  $f_j$  збігається до  $f$  рівномірно в метриці  $\rho$ , це означає, що

$$g^{-1}(f_{j_k}(x_k)) - g^{-1}(f(x_k)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Оскільки  $C$  – компакт, то  $g^{-1}(f(C))$  також компакт у  $D'$  як неперервний образ компакту. Тоді існує збіжна підпослідовність послідовності  $g^{-1}(f(x_k)), k = 1, 2, \dots$ . Без обмеження загальності можна вважати, що сама ця послідовність збігається до деякої точки  $\omega_0 \in D'$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тоді зі співвідношення (31) випливає, що

$$g^{-1}(f_{j_k}(x_k)) - \omega_0 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Оскільки  $g$  – гомеоморфізм у  $D'$ , з (32) випливає, що  $f_{j_k}(x_k) \rightarrow g(\omega_0)$ . З іншого боку, співвідношення  $g^{-1}(f(x_k)) \rightarrow \omega_0$  при  $k \rightarrow \infty$  тягне за собою, що  $f(x_k) \rightarrow g(\omega_0)$ . За нерівністю трикутника

$$|f_{j_k}(x_k) - f(x_k)| \leq |f_{j_k}(x_k) - g(\omega_0)| + |g(\omega_0) - f(x_k)| \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Останнє співвідношення суперечить (30), що і доводить локально рівномірну збіжність сім'ї  $f_j, j = 1, 2, \dots$ , у  $D$ .

Тоді з огляду на [8, лема 1]  $f$  або нульвимірне, або стале відображення. Оскільки за умовою  $f$  не є сталим,  $f$  – нульвимірне. Тоді існують точка  $z_0 \in D$ , число  $r_0 > 0$  і окіл елемента  $P_0$  такі, що

$$\overline{B(z_0, r_0)} \subset D, \quad f(\overline{B(z_0, r_0)}) \cap \overline{U} = \emptyset. \quad (33)$$

Покладемо  $F := \overline{B(z_0, r_0)}$ . З огляду на (33) покажемо, що існує окіл  $V$  елемента  $P_0$  такий, що

$$f_j(F) \cap V = \emptyset, \quad j = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Припустимо протилежне. Тоді існують послідовності  $j_m \in \mathbb{N}$  і  $x_m \in F, m = 1, 2, \dots$ , такі, що  $f_{j_m}(x_m) \rightarrow P_0$  при  $m \rightarrow \infty$ . З огляду на те, що  $f_{j_m}(F)$  є компактом у  $D'$  при кожному

фіксованому  $m$ , послідовність індексів  $j_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , можна вважати зростаючою. Тоді за нерівністю трикутника

$$\rho(f(x_m), P_0) \leq \rho(f(x_m), f_{j_m}(x_m)) + \rho(f_{j_m}(x_m), P_0) \rightarrow 0 \quad (35)$$

при  $m \rightarrow \infty$ , оскільки  $\rho(f(x_m), f_{j_m}(x_m))$  при  $m \rightarrow \infty$  по рівномірній збіжності  $f_m$  до  $f$  у  $D$  по метриці  $\rho$ . Співвідношення (35) суперечить (33), що доводить (34).

Позначимо  $\Gamma_k := \Gamma(F, C_{j_k}, D)$ . Зауважимо, що область зі слабо плоскою межею є рівномірною (див. [6, наслідок 4.3]), тобто, якщо континууми  $C_{j_k}$  задовольняють умову  $h(C_{j_k}) \geq \delta > 0$  і  $h(F) > \delta_* > 0$ , то знайдеться  $\delta_2 > 0$  таке, що

$$M(\Gamma_k) \geq \delta_2 > 0 \quad (36)$$

для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . Нехай  $d_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , – послідовність областей, яка відповідає простому кінцю  $P_0$ , і нехай  $\sigma_l$  – розріз, що відповідає  $d_l$ . Можна вважати, що усі  $\sigma_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , лежать на сферах  $S(y_0, r_l)$  з центром у деякій точці  $y_0 \in \partial D'$ , де  $r_l \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$  (див. [14, лема 3.1], див. також [15, лема 1]).

Доведемо, що для кожного  $l \in \mathbb{N}$  існує номер  $k = k_l$  такий, що

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset d_l, \quad k \geq k_l. \quad (37)$$

Припустимо протилежне. Тоді існує  $l_0 \in \mathbb{N}$  таке, що

$$f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0}) \neq \emptyset \quad (38)$$

для деякої зростаючої послідовності номерів  $k_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . В такому випадку, знайдеться послідовність  $z_m \in f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Нехай  $z_m = f_{j_{k_m}}(x_m)$ ,  $x_m \in C_{j_{k_m}}$ .

Оскільки за припущенням  $\rho(f(C_{j_k}), P_0) \rightarrow 0$  для деякої зростаючої послідовності номерів  $j_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то зокрема

$$\rho(f(C_{j_{k_m}}), P_0) \rightarrow 0 \quad \text{п} \quad m \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Оскільки  $\rho(f(C_{j_{k_m}}), P_0) = \inf_{y \in f(C_{j_{k_m}})} \rho(y, P_0)$  і  $f(C_{j_{k_m}})$  є компактом як неперервний образ компакту  $C_{j_{k_m}}$  при відображенні  $f$ , звідси випливає, що  $\rho(f(C_{j_{k_m}}), P_0) = \rho(y_m, P_0)$ , де  $y_m \in f(C_{j_{k_m}})$ . Тоді зі співвідношення (39) ми отримаємо, що  $y_m \rightarrow P_0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Нехай  $y_m = f(\xi_m)$ , де  $\xi_m \in C_{j_{k_m}}$ . Отже, за нерівністю трикутника

$$\begin{aligned} \rho(z_m, P_0) &= \rho(f_{j_{k_m}}(x_m), P_0) \leq \\ &\leq \rho(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) + \rho(f(x_m), f(\xi_m)) + \rho(f(\xi_m), P_0) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (40)$$

оскільки  $\rho(f_{j_{k_m}}(x_m), f(x_m)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  по рівномірній збіжності  $f_m$  у  $D$  по метриці  $\rho$ ; крім того,  $\rho(f(x_m), f(\xi_m)) \leq \rho(f(C_{j_{k_m}})) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  за умови леми; нарешті,  $\rho(f(\xi_m), P_0) = \rho(y_m, P_0) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  за доведеним вище. Отже, з огляду на (40)  $z_m \rightarrow P_0$  при  $m \rightarrow \infty$ , але це суперечить умові  $z_m \in f_{j_{k_m}}(C_{j_{k_m}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus d_{l_0})$ . Ця умова, в свою чергу, спростовує (38) і доводить (37).

З (37) випливає, що  $f_{j_{k_l}}(C_{j_{k_l}}) \subset d_l$ , причому можна вважати послідовність номерів  $k_l, l = 1, 2, \dots$ , зростаючою. Переходячи к перенумерації в разі потреби, не обмежуючи загальності можна вважати, що сама послідовність  $k$  задовольняє ці умови, тобто,

$$f_{j_k}(C_{j_k}) \subset d_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (41)$$

З огляду на (34) можна вважати, що

$$f_{j_k}(F) \subset D' \setminus d_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (42)$$

В такому випадку, зауважимо, що

$$f_{j_k}(\Gamma_{j_k}) \supset \Gamma(S(y_0, r_k), S(y_0, r_1), A(y_0, r_k, r_1)). \quad (43)$$

Дійсно, нехай  $\tilde{\gamma} \in f_{j_k}(\Gamma_{j_k})$ . Тоді  $\tilde{\gamma}(t) = f_{j_k}(\gamma(t))$ , де  $\gamma \in \Gamma_{j_k}$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ,  $\gamma(0) \in F$ ,  $\gamma(1) \in C_{j_k}$ . За співвідношенням (42) маємо, що  $f_{j_k}(\gamma(0)) \in f_{j_k}(F) \subset D' \setminus d_1$ , крім того, за співвідношенням (41) ми отримаємо, що  $f_{j_k}(\gamma(1)) \in f_{j_k}(C_{j_k}) \subset d_k$ . Отже,  $|f(\gamma(t))| \cap d_1 \neq \emptyset \neq |f(\gamma(t))| \cap (D' \setminus d_1)$ . Тоді за [9, теорема 1.1.5.46] та означенням розрізу області існує  $0 < t_1 < 1$  таке, що  $f_{j_k}(\gamma(t_1)) \in \partial d_1 \cap D' \subset S(y_0, r_1)$ . Покладемо  $\gamma_1 := \gamma|_{[t_1, 1]}$ . Можна вважати, що  $f_{j_k}(\gamma(t)) \in d_1$  при всіх  $t \geq t_1$ . Міркуючи аналогічно, ми отримаємо точку  $t_2 \in (t_1, 1]$  таку, що  $f_{j_k}(\gamma(t_2)) \in S(y_0, r_k)$ . Покладемо  $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$ . Можна вважати, що  $f_{j_k}(\gamma(t)) \in d_k$  при всіх  $t \in [t_1, t_2]$ . Тоді крива  $f_{j_k}(\gamma_2)$  є підкривою кривої  $f_{j_k}(\gamma) = \tilde{\gamma}$ , яка належить сім'ї  $\Gamma(S(y_0, r_k), S(y_0, r_1), A(y_0, r_k, r_1))$ . Співвідношення (43) встановлено.

З (43) випливає, що

$$\Gamma_{j_k} \supset \Gamma_{f_{j_k}}(S(y_0, r_k), S(y_0, r_1), A(y_0, r_k, r_1)). \quad (44)$$

Покладемо

$$\eta_k(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_k, r_1), & t \in (r_k, r_1), \\ 0, & t \notin (r_k, r_1), \end{cases}$$

де  $I(r_k, r_1) = \int_{r_k}^{r_1} \psi(t) dt$ . Зауважимо, що  $\int_{r_k}^{r_1} \eta_k(t) dt = 1$ . Тоді за співвідношеннями (8) і (44) з огляду на означення відображення  $f_{j_k}$  у (2) будемо мати:

$$\begin{aligned} M(\Gamma_{j_k}) &\leq M(\Gamma_{f_{j_k}}(S(y_0, r_k), S(y_0, r_1), A(y_0, r_k, r_1))) \leq \\ &\leq \frac{1}{I^n(r_k, r_1)} \int_{A(y_0, r_k, r_1)} Q(y) \cdot \psi^n(|y - y_0|) dm(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (45)$$

Останнє співвідношення суперечить (13). Отримана суперечність доводить лему.  $\square$

**Лема 5.** Нехай  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – область, яка має слабо плоску межу, а область  $D' \subset \mathbb{R}^n$  є регулярною. Припустимо,  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області  $D$  на  $D'$ , які збігаються рівномірно у  $D$  до деякого відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці  $y_0 \in \overline{D'}$ . Нехай для будь-якого  $y_0 \in \overline{D'}$  знайдеться  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y_0) > 0$  і вимірна за Лебегом функція  $\psi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$  такі, що виконуються співвідношення (7)–(8), де  $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$  визначено

в (1). Тоді відображення  $f$  є нульвимірним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$ ,  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$  і  $\bar{f}$  є нульвимірним відносно  $\bar{D}_P$ .

*Доведення.* Можна вважати  $y_0 \neq \infty$ . Як було встановлено в ході доведення леми 4, послідовність  $f_j$  збігається до  $f$  локально рівномірно в  $D$ . Тоді з огляду на [8] відображення  $f$  є нульвимірним у  $D$ . За теоремою 1.1 і зауваженням 2.1 в [16], кожне  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , має неперервне продовження  $\bar{f}_m : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$  на  $\bar{D}$  таке, що  $f_m(\bar{D}) = \bar{D}'_P$ . Покажемо, що існує  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  для кожного  $x_0 \in \partial D$ , де наявність границі слід розуміти в сенсі метрики  $\rho$  у  $\bar{D}'_P$ .

Дійсно, за нерівністю трикутника

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f_m(x_0)) + \rho(f_m(x_0), f(x_0)).$$

У цій нерівності перший і третій доданки прямують до нуля з огляду на рівномірну збіжність  $f_m$  у  $D$ . Отже, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться номер  $M = M(\varepsilon)$  такий, що при  $m \geq M(\varepsilon)$

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \rho(f_m(x), f_m(x_0)). \quad (46)$$

При  $m = M(\varepsilon)$  відображення  $f_m$  неперервно продовжується в точку  $x_0$ , так що знайдеться  $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$  таке, що  $\rho(f_m(x), f_m(x_0)) < \varepsilon/3$  при  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Тоді з огляду на (46)  $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  при тих же  $\delta$ .

Покажемо, що  $f$  – замкнене у  $D$ . Нехай  $E$  – замкнене в  $D$ . Треба показати, що  $f(E)$  замкнене в  $D'$ . Нехай  $z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність у  $f(E)$  така, що  $z_m \rightarrow z_0 \in D'$  при  $m \rightarrow \infty$ . Покажемо, що  $z_0 \in f(E)$ . Оскільки  $z_m$  знайдуться  $x_m \in E$  такі, що  $f(x_m) = z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . З огляду на компактність  $\bar{\mathbb{R}}^n$  можна вважати, що послідовність  $x_m$  збігається до деякого  $x_0 \in \bar{D}$  при  $m \rightarrow \infty$ . Якщо  $x_0 \in D$ , то  $x_0 \in E$ , отже,  $f(x_0) = z_0 \in E$  з огляду на неперервність відображення  $f$  у  $D$ . Якщо ж  $x_0 \in \partial D$ , то, оскільки  $f_m$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , знайдеться послідовність  $w_m \in D$ ,  $w_m \rightarrow x_0$  при  $m \rightarrow \infty$ , така що  $\rho(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$ . Тоді за нерівністю трикутника

$$\begin{aligned} \rho(f_m(x_0), f(x_0)) &\leq \rho(f_m(x_0), f_m(w_m)) + \rho(f_m(w_m), f(w_m)) + \rho(f(w_m), f(x_0)) \leq \\ &\leq \frac{1}{m} + \rho(f_m(w_m), f(w_m)) + \rho(f(w_m), f(x_0)) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (47)$$

оскільки  $f_m$  збігається до  $f$  рівномірно у  $D$ , а  $f$  неперервна в точці  $x_0$  за доведеним вище. З огляду на те, що  $f_m(x_0) \in E_{D'}$  при  $m \in \mathbb{N}$  за умовою відкритості, дискретності і замкненості  $f_m$  (див. [4, теорема 3.3]), а також по замкненості межі  $\partial D$ , маємо:  $f(x_0) \in E_{D'}$ . Тоді по неперервності  $f$  у  $\bar{D}$  маємо:  $f(x_m) = z_m \rightarrow z_0$  і  $f(x_0) = z_0 \in E_{D'}$ . Це суперечить обранню  $z_0 \in E \subset D'$ . Остаточно,  $f(E)$  є замкненим в  $D'$ , бо в випадку  $x_0 \in D$  це встановлено, а випадок  $x_0 \in \partial D$  неможливий.

Покажемо, що  $f(\partial D) \subset E_{D'}$ . Нехай  $x_0 \in \partial D$ . Треба довести, що  $f(x_0) \in E_{D'}$ . Оскільки  $f_m$  має неперервне продовження в точку  $x_0$ , знайдеться послідовність  $w_m \in D$ ,  $w_m \rightarrow x_0$  при  $m \rightarrow \infty$ , така що  $\rho(f_m(w_m), f_m(x_0)) < \frac{1}{m}$ . Повторюючи міркування у (47), приходимо до висновку  $f(x_0) \in E_{D'}$ , що і треба було встановити.

Покажемо, що  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$ . Очевидно, що  $\bar{f}(\bar{D}) \subset \bar{D}'_P$ . Покажемо, що  $\bar{D}'_P \subset \bar{f}(\bar{D})$ . Справді, нехай  $y_0 \in \bar{D}'_P$ , тоді або  $y_0 \in D'$ , або  $y_0 \in E_{D'}$ . а) Якщо  $y_0 \in D'$ , то  $y_0 = f_j(x_j)$ ,

$x_j \in D$ . Можна вважати, що  $x_j \rightarrow x_0$ ,  $j \rightarrow \infty$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ . За неперервністю  $f$  у  $\overline{D}$  маємо:  $f(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j)$ . Проте, за рівномірною збіжністю  $f_j$  до  $f$  маємо:  $f_j(x_j) - f(x_j) = y_0 - f(x_j) \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Тоді  $y_0 = f(x_0)$ . Оскільки за доведеним  $f(\partial D) \subset E_{D'}$ , маємо:  $x_0 \in D$ . Отже,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $x_0 \in D$ . б) Нарешті, нехай  $y_0 \in E_{D'}$ , тоді знайдеться послідовність  $y_k \in D'$  така, що  $y_k = f(x_k) \rightarrow y_0$  при  $k \rightarrow \infty$  і  $x_k \in D$ . Через компактність простору  $\overline{\mathbb{R}^n}$  ми можемо вважати, що  $x_k \rightarrow x_0$ , де  $x_0 \in \overline{D}$ . Тоді  $\overline{f}(x_0) = y_0 \in \overline{f}(\partial D) \subset \overline{f}(\overline{D})$ . Отже,  $\overline{D}'_P \subset \overline{f}(\overline{D})$ .

Залишилося показати нульвимірність  $\overline{f}$  на  $\partial D'$ . Припустимо супротивне, а саме, нехай існує точка  $y_0 \in \partial D'$  така, що  $f^{-1}(y_0) \supset K_0$ , де  $K_0 \subset \overline{D}$  – деякий невідірваний континуум. Тоді, зокрема,  $\overline{f}(K_0) = y_0$ . Оскільки за доведеним  $f$  є нульвимірним у  $D$ , можна вважати, що  $K_0 \subset \partial D$ . Зауважимо, що  $f \neq \text{const}$  з огляду на рівність  $\overline{f}(\overline{D}) \subset \overline{D}'_P$ .

Оскільки  $\overline{D}$  – компакт в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , і крім того, відображення  $\overline{f}$  є неперервним в  $\overline{D}$ , воно є рівномірно неперервним в  $\overline{D}$ . В цьому випадку, для кожного  $j \in \mathbb{N}$  знайдеться  $\delta_j < 1/j$  таке, що

$$\rho(\overline{f}(x), \overline{f}(x_0)) = \rho(\overline{f}(x), y_0) < 1/j \quad \forall x, x_0 \in \overline{D}, \quad \rho(x, x_0) < \delta_j, \quad \delta_j < 1/j. \quad (48)$$

Позначимо  $B_h(x_0, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < r\}$ . Тоді для заданого  $j \in \mathbb{N}$ , покладемо

$$B_j := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Оскільки множина  $B_j$  є околom континуума  $K_0$ , за [10, лема 2.2] існує окіл  $U_j$  множини  $K_0$  такий, що  $U_j \subset B_j$  і множина  $U_j \cap D$  є зв'язною. Без обмеження загальності можна вважати, що  $U_j$  – відкрита множина. Тоді множина  $U_j \cap D$  також лінійно зв'язна (see [3, Пропозиція 13.1]). Оскільки  $K_0$  – компакт, то знайдуться  $z_0, w_0 \in K_0$  такі, що  $h(K_0) = h(z_0, w_0)$ . Звідси випливає, що знайдуться елементи  $z_j \in U_j \cap D$  і  $w_j \in U_j \cap D$  такі, що  $z_j \rightarrow z_0$  і  $w_j \rightarrow w_0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Ми можемо припускати, що

$$h(z_j, w_j) > h(K_0)/2 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (49)$$

Оскільки множина  $U_j \cap D$  лінійно зв'язна, точки  $z_j$  і  $w_j$  деякою кривою  $\gamma_j \in U_j \cap D$ . Покладемо  $C_j := |\gamma_j|$ .

Зауважимо, що  $\rho(f(C_j)) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Дійсно, оскільки  $f(C_j)$  – континуум в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , існують такі точки  $y_j, y'_j \in f(C_j)$  такі, що  $\rho(f(C_j)) = \rho(y_j, y'_j)$ . Тоді існують  $x_j, x'_j \in C_j$  такі, що  $y_j = f(x_j)$  і  $y'_j = f(x'_j)$ . Тоді точки  $x_j$  і  $x'_j$  належать до  $U_j \subset B_j$ . Це означає, що існують  $x_1^j$  і  $x_2^j \in K_0$  такі, що  $x_j \in B(x_1^j, \delta_j)$  і  $x'_j \in B(x_2^j, \delta_j)$ . В такому випадку, за співвідношенням (48) і з огляду на нерівність трикутника ми отримаємо, що

$$\begin{aligned} \rho(f(C_j)) &= \rho(y_j, y'_j) = \rho(f(x_j), f(x'_j)) \leq \\ &\leq \rho(f(x_j), f(x_1^j)) + \rho(f(x_1^j), f(x_2^j)) + \rho(f(x_2^j), f(x'_j)) < 2/j \rightarrow 0 \quad \text{п} \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (50)$$

Зі співвідношень (49) і (50) випливає, що континууми  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , задовольняють умови леми 1. За цією лемою  $\rho(f(C_j), y_0) \geq \delta_1 > 0$  для всіх  $j \in \mathbb{N}$ . З іншого боку, оскільки за доведеним вище  $x_j \in B(x_1^j, \delta_j)$ , то з огляду на співвідношення (48) ми отримаємо, що



$\rho(f(x_j), y_0) < 1/j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Отримана суперечність вказує на невірність припущення щодо відсутності нульвимірності відображення  $\bar{f}$  у  $\bar{D}$ . Лема доведена.  $\square$

**Лема 6.** Нехай за умов леми 5 відображення  $f$  зберігає орієнтацію. Тоді відображення  $f \in$  відкритим, дискретним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$ ,  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$  таке, що  $N(f, D) = N(f, \bar{D}) < \infty$ . Зокрема,  $\bar{f}$  є дискретним у  $\bar{D}$ .

*Доведення.* Можливість неперервного продовження відображення  $f$  до відображення  $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'_P$ , його нульвимірність і замкненість, так само як і рівність  $\bar{f}(\bar{D}) = \bar{D}'_P$  є твердженнями леми 5. Оскільки  $f$  зберігає орієнтацію і нульвимірне, воно також відкрите і дискретне за теоремою Тітуса-Янга (див. [17, стор. 333]). Зауважимо, що  $N(f, D) < \infty$ , див. [11, Теорема 2.8]. Доведемо що  $N(f, D) = N(f, \bar{D})$ . (Далі ми будемо міркувати, використовуючи схему доведення теореми 4.7 у [4]). Припустимо протилежне. Тоді знайдуться точки  $P_0 \in E_{D'}$  і  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \partial D$  такі, що  $f(x_i) = P_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k+1$  і  $k := N(f, D)$ . Оскільки за припущенням  $D'$  є регулярною областю, існує відображення  $g$  області  $D_0$  з локально квазіконформною межею на  $D'$ . Розглянемо відображення  $F := f \circ g^{-1}$ . Зауважимо, що за визначенням області з локально квазіконформною межею  $D_0$  є локально зв'язною на  $\partial D_0$ . В такому випадку, відображення  $F$  має неперервне продовження  $\bar{F} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}_0$  таке, що  $\bar{F}(\bar{D}) = \bar{D}_0$  (це випливає з того, що кожне з відображень  $f$  і  $g^{-1}$  має безперервне продовження на  $\bar{D}$  і  $\bar{D}'_P$ , відповідно). Покладемо  $y_0 := \bar{F}(P_0) \in D_0$ . Тоді для будь-якого  $p \in \mathbb{N}$  існує окіл  $\widetilde{U}'_p \subset B(y_0, 1/p)$  точки  $y_0$  такий, що множина  $\widetilde{U}'_p \cap D_0 = U'_p$  є зв'язною.

Доведемо, що для будь-якого  $i = 1, 2, \dots, k+1$  існує компонента  $V_p^i$  множини  $F^{-1}(U'_p)$  така, що  $x_i \in \bar{V}_p^i$ . Зафіксуємо  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . За неперервністю  $F$  в  $\bar{D}$  існує  $r_i = r_i(x_i) > 0$  таке, що  $f(B(x_i, r_i) \cap D) \setminus U'_p$ . За [3, лема 3.15] область зі слабко плоскою межею є локально зв'язною на своїй межі. Отже, ми можемо знайти окіл  $W_i \subset B(x_i, r_i)$  точки  $x_i$  такий, що  $W_i \cap D$  є зв'язним. Тоді  $W_i \cap D$  належить одній і тільки одній компоненті  $V_p^i$  множини  $F^{-1}(U'_p)$ , тоді як  $x_i \in \overline{W_i \cap D} \subset \bar{V}_p^i$ , що і слід було встановити. Далі ми покажемо, що множини  $\bar{V}_p^i$  є непересічними для будь-якого  $i = 1, 2, \dots, k+1$  і достатньо великому  $p \in \mathbb{N}$ . У свою чергу, покажемо для цього, що  $h(\bar{V}_p^i) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  для кожного фіксованого  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . Припустимо протилежне. Тоді знайдеться  $1 \leq i_0 \leq k+1$ , і число  $r_0 > 0$ ,  $r_0 < \frac{1}{2} \min_{1 \leq i, j \leq k+1, i \neq j} h(x_i, x_j)$  та зростаюча послідовність чисел  $p_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , такі, що  $S_h(x_{i_0}, r_0) \cap \bar{V}_{p_m}^{i_0} \neq \emptyset$ , де  $S_h(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, x_0) = r\}$ , і  $h$  позначає хордальну метрику в  $\mathbb{R}^n$ . У цьому випадку, знайдуться  $a_m, b_m \in V_{p_m}^{i_0}$  такі, що  $a_m \rightarrow x_{i_0}$  при  $m \rightarrow \infty$  і  $h(a_m, b_m) \geq r_0/2$ . З'єднаємо до точки  $a_m$  і  $b_m$  кривою  $C_m$ , яка повністю належить  $V_{p_m}^{i_0}$ . Тоді  $h(|C_m|) \geq r_0/2$  при  $m = 1, 2, \dots$ . З іншого боку, оскільки  $|C_m| \subset f(V_{p_m}^{i_0}) \subset B(y_0, 1/p_m)$  і одночасно  $h(F(|C_m|)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ ,  $h(F(|C_m|), y_0) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . За визначенням метрики  $\rho$  в (34) і відображення  $g$ , ми отримуємо що  $\rho(f(|C_m|)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  і  $\rho(f(|C_m|), y_0) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , що суперечить лемі 4. Отримане протиріччя вказує на те, що  $h(\bar{V}_p^i) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  для кожного фіксованого  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . З огляду на [4, лема 3.6]  $F$  є відображенням  $\bar{V}_p^i$  на  $U'_p$  для будь-яких  $i = 1, 2, \dots, k, k+1$ . Отже,  $N(f, D) = N(F, D) \geq k+1$ , що суперечить визначенню числа  $k$ . Отримана суперечність спростовує припущення, що  $N(f, \bar{D}) > N(f, D)$ . Лема доведена.  $\square$

Справедливі наступні результати.

**Теорема 3.** Нехай  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , – область, яка має слабо плоску межу, а область  $D' \subset \mathbb{R}^n$  є регулярною. Припустимо,  $f_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , – послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області  $D$  на  $D'$ , які збігаються рівномірно у  $D$  до деякого відображення  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  і задовольняють співвідношення (2) в кожній точці  $y_0 \in \overline{D'}$ .

Нехай також виконана одна з двох умов:

1)  $Q \in FMO(\overline{D'})$ ;

2) для будь-якого  $y_0 \in \overline{D'}$  знайдеться  $\delta(y_0) > 0$  таке, що для достатньо малих  $\varepsilon > 0$  виконуються умови

$$\int_{\varepsilon}^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty, \quad \int_0^{\delta(y_0)} \frac{dt}{t q_{y_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty. \quad (51)$$

Тоді відображення  $f$  є нульвимірним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D'_P}$ ,  $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D'_P}$  і  $\bar{f}$  є нульвимірним відносно  $\overline{D_P}$ .

**Теорема 4.** Нехай за умов теореми 3 відображення  $f$  зберігає орієнтацію. Тоді відображення  $f$  є відкритим, дискретним і замкненим у  $D$ , крім того,  $f$  має неперервне продовження  $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \overline{D'_P}$ ,  $\bar{f}(\overline{D}) = \overline{D'_P}$  таке, що  $N(f, D) = N(f, \overline{D}) < \infty$ . Зокрема,  $\bar{f}$  є дискретним у  $\overline{D}$ .

Доведення теорем 3 і 4 випливає з лем 5 і 6 за рахунок спеціально підібраної функції  $\psi$ , див. [12, лема 1.3].  $\square$

## Список літератури

- [1] Cristea M. Open discrete mappings having local  $ACL^n$  inverses // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – **55**, no. 1–3. – P. 61–90.
- [2] Martio O., Rickman S., and Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
- [3] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [4] Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in  $n$ -space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. – 1976. – **11**. – P. 1–44.
- [5] Väisälä J. Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [6] Sevost'yanov E. On boundary discreteness of mappings with a modulus conditions // Acta Mathematica Hungarica. – 2023. – **171**, no. 1. – P. 67–87.
- [7] Севостьянов Е.О., Скворцов С.О., Довгопятый О.П. Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецкого // Укр. мат. вісник. – 2020. – **17**, № 3. – С. 414–436; translation Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A., Dovhopiatyi O.P. On nonhomeomorphic

- mappings with the inverse Poletsky inequality // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – **252**, no. 4. – P. 541–557.
- [8] *Sevost'yanov E.A. and Skvortsov S.A.* On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, no. 7. – P. 1097–1114.
- [9] *Кураатовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.
- [10] *Herron J. and Koskela P.* Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains // Compl. Var. Theor. Appl. – 1990. – **15**. – P. 167–179.
- [11] *Martio O., Srebro U.* Automorphic quasimeromorphic mappings in  $\mathbb{R}^n$  // Acta Math. – 1975. – **135**. – P. 221–247.
- [12] *Sevost'yanov E.A.* Mappings with Direct and Inverse Poletsky Inequalities. Developments in Mathematics (DEVM, volume 78). – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023.
- [13] *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 13–40.
- [14] *Ilyutko D.P. and Sevost'yanov E.A.* On prime ends on Riemannian manifolds // J. Math. Sci. – 2019. – **241**, no. 1. – P. 47–63.
- [15] *Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I.* On the theory of prime ends for space mappings // Ukrainian Math. J. – 2015. – **67**, no. 4. – P. 528–541.
- [16] *Sevost'yanov E.A.* On discrete boundary extension of mappings in terms of prime ends, arXiv:2203.14002, <https://arxiv.org/pdf/2203.14002.pdf>.
- [17] *Titus C.J. and Young G.S.* The extension of interiority with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 329–340.

## КОНТАКТНА ІНФОРМАЦІЯ

### Євген Олександрович Севостьянов

1. Житомирський державний університет ім. І. Франко

вул. Велика Бердичівська, 40

м. Житомир, Україна, 10 008

2. Інститут прикладної математики і механіки НАН України,

вул. Добровольського, 1

м. Слов'янськ, Україна, 84 100

e-mail: [esevostyanov2009@gmail.com](mailto:esevostyanov2009@gmail.com)

### Валерій Андрійович Таргонський

Житомирський державний університет ім. І. Франко

вул. Велика Бердичівська, 40

м. Житомир, Україна, 10 008

e-mail: [w.targonsk@gmail.com](mailto:w.targonsk@gmail.com)