Équations en diviseurs

Patrick Letendre

Résumé

Soit $d(n) \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des $\tau(n)$ diviseurs de n. On généralise une méthode de Tenenbaum et de la Bretèche pour l'étude de l'ensemble $d(n)$. En particulier, on arrive à montrer que

$$|\{(d_1, d_2, d_3) \in d(n)^3 : d_1 + d_2 = d_3\}| \leq \tau(n)^{2-\delta}$$

avec $\delta = 0.045072$.

Abstract

Let $d(n) \subset \mathbb{N}$ be the set of the $\tau(n)$ divisors of n. We generalize a method of Tenenbaum and de la Bretèche for the study of the set $d(n)$. Among other things, we establish that

$$|\{(d_1, d_2, d_3) \in d(n)^3 : d_1 + d_2 = d_3\}| \leq \tau(n)^{2-\delta}$$

with $\delta = 0.045072$.

AMS Subject Classification numbers : 11N37, 11N56, 11N64.
Key words : divisors, the number of divisors function.

1 Introduction et notation

Désignons par $1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{\tau(n)} = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n. Désignons aussi l'ensemble de ces diviseurs par $d(n)$. Dans [13], une nouvelle classe de fonctions arithmétiques fut introduite pour étudier $d(n)$. En particulier, des estimés pour les quantités $|\{d \in d(n) : \ d(d+1) \mid n\}|$ et $|\{1 \leq i \leq \tau(n) : \ (t_i, t_{i+1}) = 1\}|$ ont été obtenus. Dans [3], ces résultats ont été significativement affinés en une théorie satisfaisante pour ladite classe de fonctions. Certaines des fonctions concernées avaient déjà un historique dans la littérature, voir notamment [5] et [7]. Aussi, dans [4] et [9], des résultats complémentaires, spécialisés sur les diviseurs qui sont des valeurs prisent par un polynôme fixé, sont obtenus par des méthodes différentes. Dans cet article, on se propose de généraliser la classe des fonctions arithmétiques considérées, notablement en considérant des j-uplets de diviseurs copremiers.

Définissons les fonctions

$$\kappa_j(n) := \sum_{\substack{d_i \mid n \\ i=1,\dots,j \\ pgcd(d_{i_1}, d_{i_2})=1 \\ (i_1 \neq i_2)}} 1 = \prod_{p^v \| n} (jv+1).$$

Ainsi, $\kappa_1(n)$ est tout simplement la fonction $\tau(n)$. On dira qu'un ensemble $U \subseteq d(n)^j$ est régulier si pour chaque j-uplet $(d_1, \ldots, d_j) \in U$ on a $pgcd(d_{i_1}, d_{i_2}) = 1$ pour chaque $1 \leq i_1 < i_2 \leq j$. En particulier on a toujours $|U| \leq \kappa_j(n)$. Une application $g_{j,n} : U_g \to d(n)$ définie sur un certain ensemble $U_g \subseteq d(n)^j$ régulier est dite k-régulière si pour chaque $(d_1, \ldots, d_j) \in U_g$ on a $pgcd(g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j), d_i) = 1$ pour chaque $i = 1, \ldots, j$ et si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. Pour chaque $1 \leq i \leq j$ et chaque choix de $d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_j$ et d fixé, le nombre de solutions x à l'équation
$$g_{j,n}(d_1, \ldots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \ldots, d_j) = d$$
avec $(d_1, \ldots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \ldots, d_j) \in U_g$ est d'au plus k.
2. Pour chaque $1 \leq i \leq j$ et chaque choix de $d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_j$ et d fixé, le nombre de solutions x à l'équation
$$xg_{j,n}(d_1, \ldots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \ldots, d_j) = d$$
avec $(d_1, \ldots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \ldots, d_j) \in U_g$ est d'au plus k.

On considère simplement que l'application $g_{j,n}$ sur chaque j-uplet de $d(u)^j \setminus U_g$ est non définie. Nous désignons alors la classe $\mathcal{E}_{j,k}$ des fonctions arithmétiques $F_{j,k}(n)$ du type
$$F_{j,k}(n) = |U_g|$$
pour une application $g_{j,n}$ k-régulière. Aussi, suivant [3], on définit
$$E_{j,k}(n) := \max_{F_{j,k} \in \mathcal{E}_{j,k}} |F_{j,k}(n)|.$$
Dans certaines circonstances on va aussi vouloir ajouter une troisième condition.

3. Pour chaque $1 \leq i_1 < i_2 \leq j$ et chaque choix de $d_1, \ldots, d_{i_1-1}, d_{i_1+1}, \ldots, d_{i_2-1}$, $d_{i_2+1}, \ldots, d_j, d$ et d' fixé on a que le nombre de solutions (x_1, x_2) au système
$$\left\{ \begin{array}{c} g_{j,n}(d_1, \ldots, d_{i_1-1}, x_1, d_{i_1+1}, \ldots, d_{i_2-1}, x_2, d_{i_2+1}, \ldots, d_j) = d \\ x_1 x_2 = d' \end{array} \right.$$
avec $(d_1, \ldots, d_{i_1-1}, x_1, d_{i_1+1}, \ldots, d_{i_2-1}, x_2, d_{i_2+1}, \ldots, d_j) \in U_g$ est d'au plus k.

On dira alors que $g_{j,n}$ est fortement k-régulière. Il faut que $j \geq 2$ pour que la condition 3 soit non trivial. Pour mettre l'emphase sur l'ensemble des fonctions fortement k-régulières, on va simplement écrire respectivement $\mathcal{E}^*_{j,k}$ et $E^*_{j,k}(n)$ pour l'analogue de respectivement $\mathcal{E}_{j,k}$ et $E_{j,k}(n)$.

On va fréquemment utiliser les fonctions arithmétiques
$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1, \quad \Omega(n) := \sum_{p^v \| n} v \quad \text{et} \quad \Omega_2(n) := \sum_{p^v \| n} v^2.$$
Remarquons que de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $\sqrt{\Omega_2(n)} \geq \frac{\Omega(n)}{\sqrt{\omega(n)}}$.

2 Résultats principaux

Théorème 1. **(a)** *Soit $j \geq 1$ un entier fixé. On définit la constante*

$$\begin{aligned} \delta_j &:= \Big(\frac{2j^2}{(j+1)(2j+1)} \log\frac{2j}{2j+1} + \frac{3j+1}{(j+1)(2j+1)} \log\frac{3j+1}{2j+1}\Big) / \log(j+1) \\ &= f_{\frac{1}{2j+1}}(j)/\log(j+1) \quad (\textit{voir le Lemme } 4). \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$E_{j,k}(n) \leq k\kappa_j(n)^{1-\delta_j}.$$

(b) *Soient $n \geq 1$ un entier et $\delta := 0.045072$. Alors*

$$E_{2,k}(n) \leq k\kappa_2(n)^{1-\delta}.$$

Théorème 2. **(a)** *Soit $n \geq 1$ un entier libre de carré. Alors*

$$E^*_{j,k}(n) \leq k\Big(\frac{j+2}{2^{\frac{2}{j+2}}}\Big)^{\omega(n)}.$$

(b) *Pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$E_{j,k}(n) \leq k \prod_{p^v \| n} \big((j+1)v^{\frac{j}{j+1}}\big).$$

Le prochain résultat concerne l'énergie additive des diviseurs de n définie par

$$E(d(n)) := |\{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in d(n)^4 : \ d_1 + d_2 = d_3 + d_4\}|. \tag{2.1}$$

L'énergie multiplicative de $d(n)$ est très bien comprise ; voir le Théorème 1.4 de [12]. Ce n'est pas très étonnant étant donné la structure multiplicative des éléments de $d(n)$. Par contre, l'énergie additive est plus difficile à aborder. Il existe un argument heuristique bien connu (voir [6] et [11]) qui, lorsque adapté à notre situation, nous laisse croire que peut-être

$$E(d(n)) = 2\tau(n)^2 + O(\tau(n)\exp(\omega(n)^{3/4+\epsilon}))$$

pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $\omega(n)$ tends vers l'infini. Les meilleurs résultats connus fournissent un terme d'erreur $O(\tau(n)C^{\omega(n)})$ pour une certaine constante C plutôt large. Le Théorème 3 de [8] nous donne la constante $C = (2^{35} \cdot 9)^{27}$.

Théorème 3. **(a)** *Soit $n \geq 1$ un entier libre de carré. On a*

$$E(d(n)) \ll (7.8784716)^{\omega(n)}.$$

(b) *Soit $n \geq 2$ un entier. On a*

$$E(d(n)) \ll \frac{\tau(n)^3}{\sqrt{\Omega_2(n)}}.$$

Corollaire 1. *Soient $n \geq 1$ un entier et δ la constante introduite au Théorème 1b. Alors*

$$|\{(d_1, d_2, d_3) \in d(n)^3 : \ d_1 + d_2 = d_3\}| \leq \tau(n)^{2-\delta}. \tag{2.2}$$

Le Corollaire 2 généralise le Corollaire 2.1 de [3].

Corollaire 2. *Fixons $j \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$ nous avons*

$$E_{j,k}(n) \ll \frac{k\kappa_j(n)}{\Omega(n)}.$$

Corollaire 3. *Soit $n \geq 1$ un entier libre de carré. Considérons la fonction*

$$G(m) := |\{(d_1, d_2, d_3) \in d(n)^3 : d_1 + d_2 = d_3 + m\}|.$$

Alors

$$G(m) \ll (3.969502)^{\omega(n)}$$

uniformément en m.

3 Résultats préliminaires

Écrivons la factorisation de l'entier n en nombres premiers distincts sous la forme

$$n = p_1^{v_1} \cdots p_{\omega(n)}^{v_{\omega(n)}}$$

où $\nu(n) := (v_1, \dots, v_{\omega(n)})$ satisfait $v_1 \geq \cdots \geq v_{\omega(n)}$. Une telle écriture n'est pas nécessairement unique, mais le vecteur $\nu(n)$ est uniquement défini.

Lemme 1. *Soient $j, k, n \geq 1$ des entiers. La valeur de $E_{j,k}(n)$ ne dépend que du vecteur $\nu(n)$.*

Démonstration. Soit m un autre entier pour lequel $\nu(m) = \nu(n)$. Soit $g_{j,n}$ une application k-régulière qui réalise $F_{j,k}(n) = E_{j,k}(n)$. Écrivons

$$n = p_1^{v_1} \cdots p_{\omega(n)}^{v_{\omega(n)}} \quad m = q_1^{v_1} \cdots q_{\omega(n)}^{v_{\omega(n)}}.$$

Pour chaque diviseur d de n de la forme $d = p_1^{\gamma_1} \cdots p_{\omega(n)}^{\gamma_{\omega(n)}}$ avec $0 \leq \gamma_i \leq v_i$ on dénote par $\tilde{d}$ l'entier $q_1^{\gamma_1} \cdots q_{\omega(n)}^{\gamma_{\omega(n)}}$. On peut ainsi définir la fonction

$$g_{j,m}(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_j) := \tilde{g}_{j,n}(d_1, \dots, d_j).$$

On vérifie que $g_{j,m}$ satisfait les conditions voulues et on trouve $E_{j,k}(n) \leq E_{j,k}(m)$. L'autre sens se fait de la même façon et le résultat s'en suit. $\square$

Lemme 2. *Soient $m, n \geq 1$ deux entiers copremiers. Alors*

$$E_{j,k_1}(n)E_{j,k_2}(m) \leq E_{j,k_1k_2}(nm).$$

Démonstration. Soient respectivement $g_{j,n}$ et $g_{j,m}$ des applications qui réalisent respectivement $F_{j,k_1}(n) = E_{j,k_1}(n)$ et $F_{j,k_2}(m) = E_{j,k_2}(m)$. Pour chaque $(d_1, \ldots, d_j) \in U_{g_{j,n}}$ et $(e_1, \ldots, e_j) \in U_{g_{j,m}}$ on définit

$$g_{j,nm}(d_1e_1, \ldots, d_je_j) := g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j)g_{j,m}(e_1, \ldots, e_j).$$

On vérifie alors que $g_{j,nm}$ est k_1k_2-régulière et le résultat en découle. □

Lemme 3. *Soit $j \geq 1$ fixé. Supposons que pour tous $k, n \geq 1$ on ait*

$$E_{j,k}(n) \leq Ck\eta(n)$$

pour une certaine fonction multiplicative η qui ne dépend que de $\nu(n)$ et une certaine constante $C \geq 1$. Alors, on a

$$E_{j,k}(n) \leq k\eta(n).$$

Démonstration. On utilise le Lemme 1 pour trouver $N-1$ entiers n_i tous deux-à-deux copremiers, copremiers avec n, avec le même vecteur ν et qui satisfont

$$E_{j,k}(n) = E_{j,k}(n_1) = \cdots = E_{j,k}(n_{N-1}).$$

Du Lemme 2, on trouve

$$\begin{aligned} E_{j,k}^N(n) &= E_{j,k}(n)\prod_{i=1}^{N-1} E_{j,k}(n_i) \\ &\leq E_{j,k^N}(nn_1\cdots n_{N-1}) \\ &\leq Ck^N\eta(nn_1\cdots n_{N-1}) \\ &= Ck^N\eta^N(n). \end{aligned}$$

On déduit que $E_{j,k}(n) \leq C^{1/N}k\eta(n)$ et le résultat suit en laissant N tendre vers l'infini. □

Remarque 1. *Les Lemme 1, 2 et 3 restent vrais pour $E^*_{j,k}(n)$.*

Lemme 4. *Pour chaque réel $\alpha \in [0, 1)$ on considère les fonctions*

$$f_\alpha(x) := -(1-\alpha)\frac{x}{x+1}\log\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha x+1}{x+1}\log \alpha x + 1 \quad (x \geq 0)$$

et

$$l_\alpha(x) := \frac{(1+\alpha)x}{x+1}\log\frac{\alpha x+1}{1-\alpha} - \log\frac{\alpha(x-1)+1}{1-\alpha} \quad (x \geq 1).$$

Alors on a

(i) $f_\alpha(0) = 0$;

(ii) *La fonction* $\frac{f_\alpha(x)}{\log x+1}$ *est strictement croissante pour* $x \geq 0$ *pour chaque* $\alpha \in (0,1)$;

(iii) *On a* $l_\alpha(x) \geq f_\alpha(x)$ *pour tout* $x \geq 1$.

Démonstration. (i) est une vérification évidente. Pour démontrer (ii), on procède comme suit.

- On considère la fonction

$$b_1(\alpha, x) := (x+1)^2(\log(x+1))^2 \frac{d}{dx}\frac{f_\alpha(x)}{\log(x+1)}.$$

  On veut montrer que $b_1(\alpha, x)$ est strictement positive pour tout $x > 0$. On vérifie que $b_1(\alpha, 0) = 0$.

- On considère alors la fonction

$$b_2(\alpha, x) := (x+1)(\alpha x+1)\frac{d}{dx}b_1(\alpha, x).$$

  On veut montrer que $b_2(\alpha, x)$ est strictement positive pour tout $x > 0$. On vérifie que $b_2(\alpha, 0) = 0$.

- On vérifie que

$$\frac{d}{dx}b_2(\alpha, x)\Big|_{x=0} = -(1-\alpha)(\alpha + \log(1-\alpha))$$

  est strictement positif pour tout $\alpha \in (0,1)$ en évaluant le dernier facteur en $\alpha = 0$ et en vérifiant que sa dérivé est positive.

- On vérifie que

$$\frac{d^2}{dx^2}b_2(\alpha, x)\Big|_{x=0} = -2\alpha(1-\alpha)\log(1-\alpha)$$

  est strictement positif pour tout $\alpha \in (0,1)$.

- On vérifie que

$$\frac{d^3}{dx^3}b_2(\alpha, x) = \frac{2\alpha^2(1-\alpha)}{(x+1)(\alpha x+1)}$$

  est strictement positif pour tout $\alpha \in (0,1)$ et $x \geq 0$.

En remontant la chaîne d'étapes on déduit que $\frac{f_\alpha(x)}{\log(x+1)}$ est strictement croissante pour $x \geq 0$ pour chaque $\alpha \in (0,1)$. Pour démontrer (iii), on commence par définir la fonction

$$q(\alpha, x) := l_\alpha(x) - f_\alpha(x) \quad (x \geq 1)$$

et on suit les étapes suivantes.

- On vérifie d'abord que $q(\alpha, 1) \equiv 0$.

- On considère alors la fonction

$$q_1(\alpha, x) := (x+1)^2(\alpha x+1)(\alpha(x-1)+1)\frac{d}{dx}q(\alpha, x).$$

On veut montrer que $q_1(\alpha, x)$ est positive pour $x \geq 1$ pour tout $\alpha \in [0, 1)$. On vérifie que

$$q_1(\alpha, 1) = 2(\alpha+1)(\log(\alpha+1) - \log(1-\alpha) - 2\alpha)$$

est positif pour chaque $\alpha \in [0, 1)$ en évaluant le dernier facteur en $\alpha = 0$ et en vérifiant que sa dérivé est positive.

- On considère ensuite la fonction

$$q_1'(\alpha, x) := \frac{d}{dx}q_1(\alpha, x).$$

On vérifie que

$$q_1'(\alpha, 1) = 2\alpha(\alpha+2)\Big(\log(\alpha+1) - \log(1-\alpha) - \frac{4\alpha}{\alpha+2}\Big)$$

est positif pour chaque $\alpha \in [0, 1)$ de la même façon qu'à l'étape précédente.

- On considère maintenant la fonction

$$q_1''(\alpha, x) := \frac{d}{dx}q_1'(\alpha, x).$$

On vérifie que

$$q_1''(\alpha, 1) = 4\alpha^2\Big(\log(\alpha+1) - \log(1-\alpha) - \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\Big)$$

est positif pour chaque $\alpha \in [0, 1)$ encore de la même façon.

- On considère finalement la fonction

$$\begin{aligned} q_1'''(\alpha, x) &:= \frac{d}{dx}q_1''(\alpha, x) \\ &= \frac{2\alpha^3(2\alpha x+\alpha+2)}{(\alpha x+1)^2} \end{aligned}$$

qui est visiblement positive pour tout $\alpha \in [0, 1)$ et $x \geq 1$.

En remontant la chaîne des étapes on déduit que $l_\alpha(x) \geq f_\alpha(x)$ pour $x \geq 1$ pour chaque $\alpha \in [0, 1)$. □

Lemme 5. *Pour tous $s \geq 0$ et $1 \leq \beta \leq 2$ on a*

$$\sum_{i=0}^{s}(2i+1)^{\beta-1} \leq (s+1)^\beta.$$

Démonstration. On procède par induction. Pour $s = 0$ c'est évident. Pour l'étape d'induction, on considère la fonction

$$\theta(x) := \frac{(x+1)^\beta - x^\beta}{(2x+1)^{\beta-1}} - 1.$$

Il est suffisant d'établir que $\theta(s) \geq 0$ pour $s \geq 1$. On a $\theta(0) = 0$ et

$$\theta'(x) = \beta \frac{(x+1)^{\beta-1} - x^{\beta-1}}{(2x+1)^{\beta-1}} - 2(\beta-1)\frac{(x+1)^\beta - x^\beta}{(2x+1)^\beta}$$

et donc $\theta'(0) = 2 - \beta \geq 0$ et $\theta'(\infty) = 0$. On dérive une seconde fois pour trouver

$$\theta''(x) = -\beta(\beta-1)\frac{x^{\beta-2} - (x+1)^{\beta-2}}{(2x+1)^{\beta+1}}$$

qui satisfait visiblement $\theta''(x) \leq 0$ pour $1 \leq \beta \leq 2$ et $x > 0$. On déduit que $\theta'(x)$ est positive pour tout $x \geq 0$ et finalement que $\theta(x)$ est positive pour tout $x \geq 0$. $\square$

La fonction Delta de Erdős-Hooley (voir [10]) est définie par

$$\Delta(n) := \sup_{u \in \mathbb{R}} |\{d \mid n : \ e^u < d \leq e^{u+1}\}|.$$

Lemme 6. *Pour tout $n \geq 2$, nous avons*

$$\Delta(n) \ll \frac{\tau(n)}{\sqrt{\Omega_2(n)}}.$$

Démonstration. Fixons nous un réel X et désignons par $R_n(X) = \{d \mid n : \ X < d \leq 2X\}$. Deux éléments distincts d_1 et d_2 de $R_n(X)$ ne peuvent pas se diviser, i.e. $d_1 \nmid d_2$. Ainsi, selon le Theorem 1 de [2], $|R_n(X)|$ est au plus égal au nombre de diviseurs d de n qui satisfont $\Omega(d) = \lfloor \frac{\Omega(n)}{2} \rfloor$. Du Theorem 2 de [1], on déduit que $|R_n(X)| \ll \frac{\tau(n)}{\sqrt{\Omega_2(n)}}$. Le résultat découle alors de l'inégalité

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ e^u < d \leq e^{u+1}}} 1 \leq \sum_{\substack{d \mid n \\ e^u < d \leq 2e^u}} 1 + \sum_{\substack{d \mid n \\ 2e^u < d \leq 4e^u}} 1.$$

$\square$

Remarque 2. *Il est très intéressant de remarquer que ce dernier lemme implique que le nombre de solutions de l'équation*

$$n = x^{2k+1} + y^{2k+1} \qquad ((x,y) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}, \ k \in \mathbb{N})$$

est d'au plus $\ll \frac{k\tau(n)}{\sqrt{\Omega_2(n)}}$.

4 Démonstration des théorèmes

4.1 Démonstration du Théorème 1

Suivant la méthode de démonstration du Théorème 2a de [3], on considère une fonction additive $h_{\alpha,j,n}(p^i) := u_{\alpha,j}(v)$ où $p^v \| n$. On va comparer les valeurs de $h_{\alpha,j,n}(d_s)$ $(s = 1, \ldots, j)$ à leur moyenne

$$\begin{aligned} A_{\alpha,j}(n) &:= \frac{1}{\kappa_j(n)} \sum_{\substack{d_i | n \\ i=1,\ldots,j \\ pgcd(d_{i_1}, d_{i_2})=1 \\ (i_1 \neq i_2)}} h_{\alpha,j,n}(d_s) \\ &= \sum_{p^v \| n} \frac{v u_{\alpha,j}(v)}{jv+1}. \end{aligned}$$

Plus précisément, pour un choix fixé de $\lambda_s \geq 0$ satisfaisant $\lambda_1 + \cdots + \lambda_j = 1$, on va comparer la forme linéaire $\lambda_1 h_{\alpha,j,n}(d_1) + \cdots + \lambda_j h_{\alpha,j,n}(d_j)$ avec $A_{\alpha,j}(n)$. On va choisir la fonction $h_{\alpha,j,n}$ de façon à concentrer le plus possible ses valeurs autour de $A_{\alpha,j}(n)$.

On considère

$$S_j^-(n, \alpha) := |\{(d_1, \ldots, d_j) \in d(n)^j : pgcd(d_{i_1}, d_{i_2}) = 1 \ (i_1 \neq i_2), \ \frac{1}{j} h_{\alpha,j,n}(d_1 \cdots d_j) \leq (1-\alpha) A_{\alpha,j}(n)\}|$$

avec $\alpha \in [0, 1)$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} S_j^-(n, \alpha) &\leq \sum_{\substack{d_i | n \\ i=1,\ldots,j \\ pgcd(d_{i_1}, d_{i_2})=1 \\ (i_1 \neq i_2)}} \exp\Big((1-\alpha) A_{\alpha,j}(n) - \frac{1}{j} h_{\alpha,j,n}(d_1 \cdots d_j)\Big) \\ &= \kappa_j(n) \exp\Big(\sum_{p^v \| n} (1-\alpha) \frac{v u_{\alpha,j}(v)}{jv+1} + \log \frac{1 + jv \exp(-u_{\alpha,j}(v)/j)}{jv+1}\Big). \end{aligned}$$

On vérifie que le choix optimal est donné par la fonction

$$u_{\alpha,j}(v) := j \log \frac{\alpha j v + 1}{1 - \alpha}, \tag{4.1}$$

ce qui nous conduit à l'inégalité

$$S_j^-(n, \alpha) \leq \kappa_j(n) \exp\Big(- \sum_{p^v \| n} f_\alpha(jv)\Big) \tag{4.2}$$

où

$$f_\alpha(x) := -(1-\alpha) \frac{x}{x+1} \log \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha x + 1}{x+1} \log \alpha x + 1.$$

On se tourne maintenant vers $S_j^+(n,\alpha,\beta,r)$ où

$$\begin{aligned} S_j^+(n,\alpha,\beta,r) &:= |\{(d_1,\ldots,d_j)\in d(n)^j:\ pgcd(d_{i_1},d_{i_2})=1\ (i_1\neq i_2),\\ &\qquad \frac{h_{\alpha,j,n}(d_1)}{1+(j-1)r}+\frac{rh_{\alpha,j,n}(d_2\cdots d_j)}{1+(j-1)r}\geq(1+\beta)A_{\alpha,j}(n)\}|.\end{aligned}$$

La fonction $h_{\alpha,j,n}$ est déjà connue et on écrit

$$\begin{aligned} S_j^+(n,\alpha,\beta,r) &\leq \sum_{\substack{d_i|n\\ i=1,\ldots,j\\ pgcd(d_{i_1},d_{i_2})=1\\ (i_1\neq i_2)}} \exp\Big(\frac{h_{\alpha,j,n}(d_1)}{1+(j-1)r}+\frac{rh_{\alpha,j,n}(d_2\cdots d_j)}{1+(j-1)r}-(1+\beta)A_{\alpha,j}(n)\Big)\\ &= \kappa_j(n)\exp\Big(\sum_{p^v\|n}\log\frac{1+v\exp(\frac{u_{\alpha,j}(v)}{1+(j-1)r})+(j-1)v\exp(\frac{ru_{\alpha,j}(v)}{1+(j-1)r})}{jv+1}-(1+\beta)\frac{vu_{\alpha,j}(v)}{jv+1}\Big). \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Ce qui motive la définition de la fonction

$$\xi(v,\alpha,\beta,j,r):=-\log\frac{1+v\exp(\frac{j\log\frac{\alpha jv+1}{1-\alpha}}{1+(j-1)r})+(j-1)v\exp(\frac{rj\log\frac{\alpha jv+1}{1-\alpha}}{1+(j-1)r})}{jv+1}+(1+\beta)\frac{jv\log\frac{\alpha jv+1}{1-\alpha}}{jv+1}$$

pour laquelle on va vouloir établir une minoration de $\frac{\xi(x,\alpha,\beta,j,r)}{\log(jx+1)}$ pour $x\geq 1$ lorsque $\alpha\in[0,1)$, $r\geq 0$ et $j\in\mathbb{N}$ sont fixés.

4.1.1 Complétion de la démonstration du Théorème 1a

Considérons la fonction $l_\alpha(x):=\xi(x/j,\alpha,\alpha,j,1)$, i.e.

$$l_\alpha(x):=\frac{(1+\alpha)x}{x+1}\log\frac{\alpha x+1}{1-\alpha}-\log\frac{\alpha(x-1)+1}{1-\alpha}.$$

Selon (iii) du Lemme 4, la fonction $q(\alpha,x)=l_\alpha(x)-f_\alpha(x)$ est positive pour $x\geq 1$ et $\alpha\in[0,1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_j^+(n,\alpha,\alpha,1) &\leq \kappa_j(n)\exp\Big(-\sum_{p^v\|n}l_\alpha(jv)\Big)\\ &\leq \kappa_j(n)\exp\Big(-\sum_{p^v\|n}f_\alpha(jv)\Big). \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, on considère une fonction k-régulière $g_{j,n}$ pour laquelle $F_{j,k}(n)=E_{j,k}(n)$. On choisit alors $\alpha=\frac{1}{2j+1}$ et on remarque que pour chaque j-uplet compté par $F_{j,k}(n)$ on a ou bien $h_{\alpha,j,n}(d_1\cdots d_j)/j$ ou un des

$$\frac{1}{j}h_{\alpha,j,n}\Big(\frac{d_1\cdots d_jg_{j,n}(d_1,\ldots,d_j)}{d_i}\Big)\qquad(i=1,\ldots,j)$$

qui est au plus $(1-\alpha)A_{\alpha,j}(n)$ ou bien sinon on a $h_{\alpha,j,n}(d_1\cdots d_{j-1}(d_jg_{j,n}(d_1,\ldots,d_j)))/j$ qui est au moins $(1+\alpha)A_{\alpha,j}(n)$. Comme $g_{j,n}$ est k-régulière on déduit que

$$E_{j,k}(n)\leq((j+1)k+1)\kappa_j(n)^{1-\delta_j}$$

des inégalités (4.2) et (4.4) et du Lemme 4 (ii). Le résultat découle du Lemme 3.

4.1.2 Complétion de la démonstration du Théorème 1b

Dans le cas où $j = 2$ on va exploiter l'argument d'avantage. On choisit les paramètres

$$\alpha := 0.2288541994, \quad r := 0.692466598 \quad \text{et} \quad \beta := \frac{2+r}{1+r}(1-\alpha) - 1.$$

On vérifie alors que $f_\alpha(2)/\log(3) \geq 0.045072(= \delta)$ et donc (4.2) devient

$$S_2^-(n, \alpha) \leq \kappa_2(n)^{1-\delta}$$

du Lemme 4 (*ii*). De même, on va montrer que

$$\xi(v, \alpha, \beta, 2, r)/\log(2v+1) \geq \delta \tag{4.5}$$

pour chaque $v \geq 1$ ce qui entraîne que

$$S_2^+(n, \alpha, \beta, r) \leq \kappa_2(n)^{1-\delta}$$

de (4.3).

En supposant l'inégalité (4.5), le reste de l'argument est semblable à celui plus haut. Précisément, on bien un des

$$\frac{h_{\alpha,2,n}(d_1 d_2)}{2}, \ \frac{h_{\alpha,2,n}(d_1 g_{2,n}(d_1, d_2))}{2} \ \text{et} \ \frac{h_{\alpha,2,n}(d_2 g_{2,n}(d_1, d_2))}{2}$$

est au plus $(1-\alpha)A_{\alpha,2}(n)$ ou sinon un des

$$\frac{h_{\alpha,2,n}(d_1 g_{2,n}(d_1, d_2))}{1+r} + \frac{r h_{\alpha,2,n}(d_2)}{1+r} \ \text{ou} \ \frac{h_{\alpha,2,n}(d_2 g_{2,n}(d_1, d_2))}{1+r} + \frac{r h_{\alpha,2,n}(d_1)}{1+r}$$

est au moins $\frac{2+r}{1+r}(1-\alpha)A_{\alpha,2}(n)$. Comme $g_{2,n}$ est k-régulière on trouve

$$E_{2,k}(n) \leq (4k+1)\kappa_2(n)^{1-\delta}$$

et le résultat découle du Lemme 3.

Il reste seulement à établir (4.5). On commence par vérifier que l'inégalité tient pour chaque $v < 1000000$ avec un ordinateur. Pour $v \geq 1000000$, on majore le numérateur du terme dans le premier logarithme par $0.11994463 \cdot (2v+1)^{2.1817072209067017 59}$ (le premier exponentiel domine) et on minore le terme dans le second logarithme par $0.29677163413447 \cdot (2v+1)$. On trouve alors une minoration de

$$0.0450722 + \frac{0.63}{\log(2v+1)} \qquad (v \geq 1000000)$$

d'où le résultat.

4.2 Démonstration du Théorème 2a

Pour tout choix de diviseurs $d_1, \ldots, d_j$ pour lesquels $g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j)$ est bien définie, on définit le diviseur e implicitement par

$$n =: d_1 \cdots d_j g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j) e. \tag{4.6}$$

On vérifie que chaque choix de j diviseurs parmi les $j+2$ dans ce dernier produit permet de résoudre le système complet $d_1, \ldots, d_j, e$ avec au plus k solutions. Un de ces choix est formé d'au plus $\frac{j\omega(n)}{j+2}$ nombres premiers. Comme il y a j^i façons d'écrire un entier formé de i nombres premiers comme un produit de j entiers, on déduit que

$$\begin{aligned} E^*_{j,k}(n) &\leq k\binom{j+2}{j} \sum_{0 \leq i \leq \frac{j\omega(n)}{j+2}} \binom{\omega(n)}{i} j^i \\ &\ll \frac{k}{\sqrt{\omega(n)}} \Big(\frac{j+2}{2^{\frac{2}{j+2}}}\Big)^{\omega(n)}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième ligne de la première, on a d'abord calculé le ratio de deux termes consécutifs dans la somme. On a alors obtenu l'inégalité à l'aide d'une série géométrique et de la formule de Stirling. Ainsi, le résultat suit de la Remarque 1.

Remarque 3. *On peut établir le même résultat pour $E_{j,k}(n)$ dans le cas $j = 1$ et 2. Pour $j = 1$, c'est simplement le Théorème 1a et donc on suppose que $j \geq 2$ dans ce qui suit. Pour $j \geq 3$ l'argument fonctionne, mais il fournit une constante plus grande. En effet, suivant la même notation, on va distinguer deux cas dont les contributions vont être notées $E^{(1)}_{j,k}(n)$ et $E^{(2)}_{j,k}(n)$ respectivement. Soit $\frac{j}{j+2} \leq \theta_j < \frac{j}{j+1}$ à choisir plus tard. Dans le premier cas, on a ou bien $\omega(d_1 \cdots d_j) \leq \theta_j \omega(n)$ ou bien*

$$\omega\Big(\frac{d_1 \cdots d_j g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j)}{d_i}\Big) \leq \theta_j \omega(n)$$

pour un certain $i = 1, \ldots, j$. Dans ce cas, comme il y a j^i façons d'écrire un entier formé de i nombres premiers comme un produit de j entiers, on déduit que

$$\begin{aligned} E^{(1)}_{j,k}(n) &\leq (jk+1) \sum_{0 \leq i \leq \theta_j \omega(n)} \binom{\omega(n)}{i} j^i \\ &\ll \frac{k}{\sqrt{\omega(n)}} \Big(\frac{j^{\theta_j}}{\theta_j^{\theta_j}(1-\theta_j)^{1-\theta_j}}\Big)^{\omega(n)}. \end{aligned}$$

Dans le second cas, on a

$$\omega(d_i) > \frac{\theta_j \omega(n)}{j}$$

pour au moins un $i = 1, \ldots, j$. Soit i_0 une de ces valeurs, on a aussi

$$\omega\Big(\frac{d_1 \cdots d_j g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j)}{d_{i_0}}\Big) > \theta_j \omega(n)$$

D'une façon semblable à plus haut, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
E^{(2)}_{j,k}(n) &\leq jk \sum_{i\geq\theta_j\omega(n)} \sum_{s\geq\theta_j\omega(n)/j} \binom{\omega(n)}{i}\binom{\omega(n)-i}{s}(j-1)^i \\
&\ll k\sqrt{\omega(n)} \sum_{i\geq\theta_j\omega(n)} \binom{\omega(n)}{i}\binom{\omega(n)-i}{\lceil\theta_j\omega(n)/j\rceil}(j-1)^i \\
&= k\sqrt{\omega(n)}\binom{\omega(n)}{\lceil\theta_j\omega(n)/j\rceil} \sum_{i\geq\theta_j\omega(n)} \binom{\omega(n)-\lceil\theta_j\omega(n)/j\rceil}{i}(j-1)^i \\
&\ll k\sqrt{\omega(n)}\binom{\omega(n)}{\lceil\theta_j\omega(n)/j\rceil}\binom{\omega(n)-\lceil\theta_j\omega(n)/j\rceil}{\lceil\theta_j\omega(n)\rceil}(j-1)^{\theta_j\omega(n)} \\
&\ll \frac{k}{\sqrt{\omega(n)}}\Big(\frac{(j-1)^{\theta_j}}{(\theta_j/j)^{\theta_j/j}\theta_j^{\theta_j}(1-\theta_j-\theta_j/j)^{1-\theta_j-\theta_j/j}}\Big)^{\omega(n)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le résultat suit du Lemme 3. On observe que pour $j = 2$ le choix optimal est $\theta_2 = \frac{1}{2}$.

4.3 Démonstration du Théorème 2b

On utilise la fonction

$$T(d) := \prod_{\substack{p|d \\ p^v\|n}} \frac{1}{v}$$

telle que définie dans [3]. On a alors

$$T(d_1)\cdots T(d_j)T(g_{j,n}(d_1,\ldots,d_j)) \geq T(n)$$

et donc il y a un choix de j des termes de gauche qui ont leur produit plus grand que $T(n)^{\frac{j}{j+1}}$. Comme $g_{j,n}$ est k-régulière, on a

$$
\begin{aligned}
E_{j,k}(n) &\leq \frac{jk+1}{T(n)^{\frac{j}{j+1}}} \sum_{\substack{d_i|n \\ i=1,\ldots,j \\ pgcd(d_{i_1},d_{i_2})=1 \\ (i_1\neq i_2)}} T(d_1)\cdots T(d_j) \\
&= (jk+1)\prod_{p^v\|n}\big((j+1)v^{\frac{j}{j+1}}\big)
\end{aligned}
$$

et le résultat suit du Lemme 3.

Remarque 4. *Il est intéressant de remarquer que*

$$(j+1)v^{\frac{j}{j+1}} < jv+1 \qquad (j\in\mathbb{N},\ v\geq 2).$$

4.4 Démonstration du Théorème 3a

L'argument s'articule autour de l'identité

$$E(d(n)) = \sum_{e|n}\sum_{m\geq 1} U(e,m)^2$$

où

$$U(e,m) := |\{(d_1,d_2)\in d(n)^2|\ d_1+d_2 = me,\ pgcd(me,n)=e\}|.$$

On commence par borner le nombre de solutions $(d_1,d_2)\in d(n)^2$ pour lesquels $d_1 + d_2 = me$ pour un certain $m \geq 1$ où $pgcd(me,n)=e$. Supposons que $pgcd(d_1,d_2)=d$ et donc $d \mid e$. On a alors

$$d = pgcd(d_1,d_2) = pgcd(d_1, me-d_1) = pgcd(d_1,me) = pgcd(d_1,e) = pgcd(d_2,e)$$

et on en déduit que $\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d} \mid \frac{n}{e}$ avec $pgcd(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d})=1$. Il y a donc au plus $2^{\omega(e)}\kappa_2(n/e)$ telles solutions, i.e.

$$\sum_{m\geq 1} U(e,m) \leq 3^{\omega(n)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\omega(e)}. \tag{4.7}$$

On a aussi besoin d'une majoration de $U(e,m)$ pour une valeur de m fixée. Comme plus haut, on reprend avec $pgcd(d_1,d_2)=d$, $\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d} \mid \frac{n}{e}$ et $pgcd(\frac{d_1}{d},\frac{d_2}{d})=1$. On déduit que pour m fixé on a $\frac{d_1}{d}\left(\frac{me}{d}-\frac{d_1}{d}\right) \mid \frac{n}{e}$ et donc le Théorème 2a de [3] entraîne qu'il y a au plus $2^{c\omega(n/e)}$ solutions $\frac{d_1}{d}$ avec $c = \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3}$. On a donc au plus $2^{c\omega(n)+(1-c)\omega(e)}$ choix pour d_1 en tout, i.e.

$$U(e,m) \leq 2^{c\omega(n)+(1-c)\omega(e)}. \tag{4.8}$$

Pour une certain paramètre η à choisir plus tard on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e|n\\ \omega(e)\geq(1-\eta)\omega(n)}}\sum_{m\geq 1} U(e,m)^2 &\leq \sum_{\substack{e|n\\ \omega(e)\geq(1-\eta)\omega(n)}} 2^{c\omega(n)+(1-c)\omega(e)}\sum_{m\geq 1} U(e,m)\\
&\leq \sum_{\substack{e|n\\ \omega(e)\geq(1-\eta)\omega(n)}} (3\cdot 2^c)^{\omega(n)}\left(\frac{2^{2-c}}{3}\right)^{\omega(e)}
\end{aligned}$$

de (4.7) et (4.8). Pour les petites valeurs de $\omega(e)$ on écrit simplement

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{e|n\\ \omega(e)<(1-\eta)\omega(n)}}\sum_{m\geq 1} U(e,m)^2 &\leq \max_{\substack{e|n\\ \omega(e)<(1-\eta)\omega(n)}} 2^{c\omega(n)+(1-c)\omega(e)}\sum_{e|n}\sum_{m\geq 1} U(e,m)\\
&= \max_{\substack{e|n\\ \omega(e)<(1-\eta)\omega(n)}} 2^{(2+c)\omega(n)+(1-c)\omega(e)}.
\end{aligned}$$

On choisit alors $\eta := 0.2702949686\ldots$ et le résultat s'en suit.

4.5 Démonstration du Théorème 3b

Considérons la fonction $r_n(m)$ définie par

$$r_n(m) := |\{(d_1, d_2) \in d(n)^2 : \ d_1 + d_2 = m\}|.$$

Il est suffisant d'établir la majortion

$$r_n(m) \ll \frac{\tau(n)}{\sqrt{\Omega_2(n)}}$$

uniformément en m. Comme on doit avoir $\frac{m}{2} \leq \max(d_1, d_2) \leq m - 1$ pour chaque couple (d_1, d_2) compté par $r_n(m)$ et que ce maximum fixe au plus 2 solutions, on déduit cette dernière inégalité du Lemme 6.

5 Démonstration des corollaires

5.1 Démonstration du Corollaire 1

On commence par partitionner les solutions selon $d := pgcd(d_1, d_2)$. En écrivant $d_i' = \frac{d_i}{d}$ pour $i = 1, 2, 3$, on trouve l'équation $d_1' + d_2' = d_3'$ où chaque $d_i' \in d(n/d)$ et chaque diviseur est copremier avec chacun des deux autres. On peut donc appliquer le Théorème 1b à l'entier n/d avec la fonction $g_{2,n/d}(d_1', d_2') = d_1' + d_2'$ qui est 1-régulière. On déduit que, pour chaque d fixé, le nombre de solutions est d'au plus $\kappa_2(n/d)^{1-\delta}$ et ainsi le nombre total de solutions est d'au plus

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \kappa_2(n/d)^{1-\delta} &= \prod_{p^v \| n} \left(1 + \kappa_2(p)^{1-\delta} + \cdots + \kappa_2(p^v)^{1-\delta}\right) \\ &\leq \prod_{p^v \| n} (v+1)^{2-\delta} = \tau(n)^{2-\delta}. \end{aligned}$$

On a utilisé le Lemme 5 à la deuxième ligne.

Remarque 5. *Il est intéressant de remarquer que la fonction $g_{2,n/d}(d_1', d_2')$, telle que définie précédemment, est aussi fortement 2-régulière. Ainsi, le Théorème 2a donne $2(1 + 2^{3/2})^{\omega(n)}$ dans le cas où n est libre de carré. Comme ici $j = 2$, la Remarque 3 donne tout de même $(1 + 2^{3/2})^{\omega(n)}$.*

5.2 Démonstration du Corollaire 2

On commence avec une remarque préliminaire. Considérons la fonction $V(n)$ définie par

$$V(n) := \max_{p^v \| n} v.$$

Soient p un nombre premier pour lequel $p^{V(n)} \| n$ et $g_{j,n}$ une fonction k-régulière qui réalise $F_{j,k}(n) = E_{j,k}(n)$. Pour chaque $(d_1, \ldots, d_j) \in U_g$, on a ou bien que $p \nmid d_1 \cdots d_j$ ou bien que

$$p \nmid \frac{d_1 \cdots d_j g_{j,n}(d_1, \ldots, d_j)}{d_i}$$

pour un $i = 1, \ldots, j$. On en déduit que

$$E_{j,k}(n) \leq \frac{(jk+1)\kappa_j(n)}{jV(n)+1}. \tag{5.1}$$

On est maintenant prêt pour l'argument. Si $\omega(n) \geq \frac{\log \Omega(n)}{\delta_j \log(j+1)}$, alors le résultat découle du Théorème 1a. Aussi, si il y a au moins $j+1$ nombres premiers p distincts pour lesquels $p^v \| n$ avec $v \geq \Omega(n)^{1/(j+1)}$, alors le résultat découle du Théorème 2b. On peut donc supposer qu'on a ni l'une ni l'autre de ces deux propriétés et on écrit alors

$$\begin{aligned} V(n) \leq \Omega(n) &\leq jV(n) + \omega(n)\Omega(n)^{1/(j+1)} \\ &\leq jV(n) + O(\Omega(n)^{1/(j+1)} \log \Omega(n)), \end{aligned}$$

i.e. $V(n) \asymp \Omega(n)$ et le résultat découle de (5.1).

5.3 Démonstration du Corollaire 3

On considère la fonction

$$W_n(\theta) := \sum_{d|n} e(\theta d)$$

où $e(x) := e^{2\pi i x}$. On a alors

$$\begin{aligned} G(m) &= \int_0^1 W_n^2(\theta)\bar{W}_n(\theta)e(-m\theta)d\theta \\ &\leq \int_0^1 \left|W_n^2(\theta)\bar{W}_n(\theta)\right|d\theta. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème 3a.

6 Conclusion

On peut utiliser le Théorème 1b pour borner le nombre de solutions qu'a l'équation $d_1 d_2 = d_3 + 1$ en entiers $(d_1, d_2, d_3) \in d(n)^3$. Il suffit de procéder essentiellement comme on a fait au Corollaire 1 en partitionnant les solutions selon le $pgcd(d_1, d_2)$; on trouve la même réponse. C'est un exemple qui nous a guidé dans les débuts de ce projet.

Un exemple de nature différente est donné par les fonctions $g_{2,n}(t_i, t_j) = t_{\frac{i+j}{2}}$ et $g_{2,n}(t_i, t_j) = t_{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor}$ qui sont respectivement 1 et 2-régulière. Ce n'est pas sans rappeler la fonction $g_{1,n}(t_i) = t_{i+1}$ qui est implicitement mentionnée dans l'introduction. On peut décrire un exemple général en choisissant pour $g_{j,n}$ un polynôme approprié de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_j]$.

Il est possible d'étendre davantage les résultats en considérant un ensemble de plusieurs fonctions $g_{1,j,n}, g_{2,j,n}, \ldots$ simultanément qui satisfont une certaine généralisation du concept de régularité.

Remerciement

Je tiens à remercier Jean-Marie De Koninck pour ses conseils et ses encouragements.

Références

[1] Anderson I., *A variance method in combinatorial number theory*, Glasgow Math. J. **10** (1969), 126 – 129.

[2] de Bruijn N. G., Van Ebbenhorst Tengbergen C. et Kruyswijk D., *On the set of divisors of a number*, Nieuw Arch. Wiskunde (2) **23** (1951), 191 – 193.

[3] de la Bretèche R., *Sur une classe de fonctions arithmétiques liées aux diviseurs d'un entier*, Indag. Math. (N.S.) **11** (2000), no. 3, 437 – 452.

[4] de la Bretèche R., *Nombre de valeurs polynomiales qui divisent un entier*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **131** (2001), no. 2, 193 – 209.

[5] Erdős P. et Hall R. R., *On some unconventional problems on the divisors of integers*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **25** (1978), no. 4, 479 – 485.

[6] Erdős P., Stewart C. L. et Tijdeman R., *Some Diophantine equations with many solutions*, Compositio Math. **66** (1988), no. 1, 37 – 56.

[7] Erdős P. et Tenenbaum G., *Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs*, J. Number Theory **31** (1989), no. 3, 285 – 311.

[8] Evertse J.-H., *The number of solutions of decomposable form equations*, Invent. Math. **122** (1995), no. 3, 559 – 601.

[9] Gyarmati K., *On the number of divisors which are values of a polynomial*, Ramanujan J. **17** (2008), no. 3, 387 – 403.

[10] Hooley C., *On a new technique and its applications to the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (3) **38** (1979), no. 1, 115 – 151.

[11] Lagarias J. C. et Soundararajan K., *Counting smooth solutions to the equation A+B=C*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **104** (2012), no. 4, 770 – 798.

[12] Letendre P., *Truncated convolution of the Möbius function and multiplicative energy of an integer n*, Acta Arith. **195** (2020), no. 1, 83 – 95.

[13] Tenenbaum G., *Une inégalité de Hilbert pour les diviseurs*, Indag. Math. (N.S.) **2** (1991), no. 1, 105 – 114.

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Pavillon Alexandre-Vachon, 1045 Avenue de la Médecine, Québec, QC G1V 0A6
E-mail address : Patrick.Letendre.1@ulaval.ca